# 2022

# مذكرة التفوق
# في الرياضيات البحتة

## للصف الثاني الثانوي العلمي
## الفصل الدراسي الأول


إعداد الأستاذ

السيد عبد الكريم عرابي

موجه رياضيات




# أولاً: الجبر

## (١) الدوال الحقيقية

## (٢) الاسس

## (٣) اللوغاريتمات

$$3x^2 - 2xy + c$$



# الدوال الحقيقية

**الدالة** هي علاقة بين مجموعتين س ، ص بحيث كل عنصر من عناصر المجموعة س يرتبط بعنصر واحد فقط من المجموعة ص

* **كتابة الدالة :-** د : س ⟵ ص أو د(س) = ص

**ملحوظة**

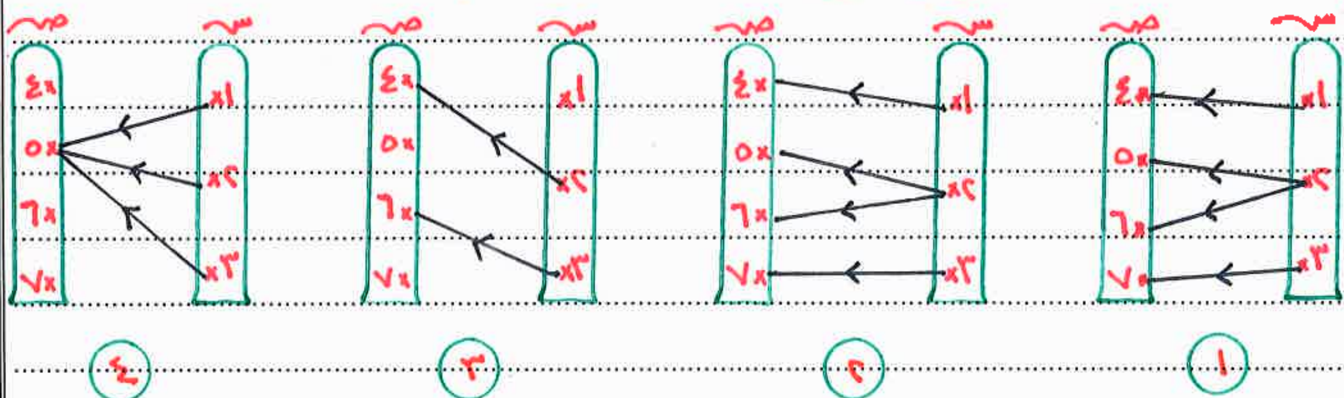
س تسمى مجال الدالة

ص تسمى المجال المقابل

المدى هو مجموعة صور عناصر المجال في المجال المقابل

---

**تدريب ١** أي العلاقات التالية يمثل دالة من س ⟵ ص




---

**تدريب ٢** العلاقات المبينة بمجموعة الأزواج المرتبة والتي لا تمثل دالة هي ...

أ) {(١ ، ٣) ، (٣ ، ٥) ، (٥ ، ٧) ، (٧ ، ٩)}  ب) {(٢ ، ٣) ، (٣ ، ٤) ، (٢ ، ١) ، (٣ ، ٥)}

ج) {(٠ ، ٣) ، (١ ، ٣) ، (٢ ، ٣) ، (٣ ، ٣)}  د) {(-٣ ، ٥) ، (-١ ، ٥) ، (٠ ، ٥) ، (٢ ، ٥)}

---

**تدريب ٣** جميع العلاقات الآتية تكون فيها ص دالة في س ماعدا العلاقة :

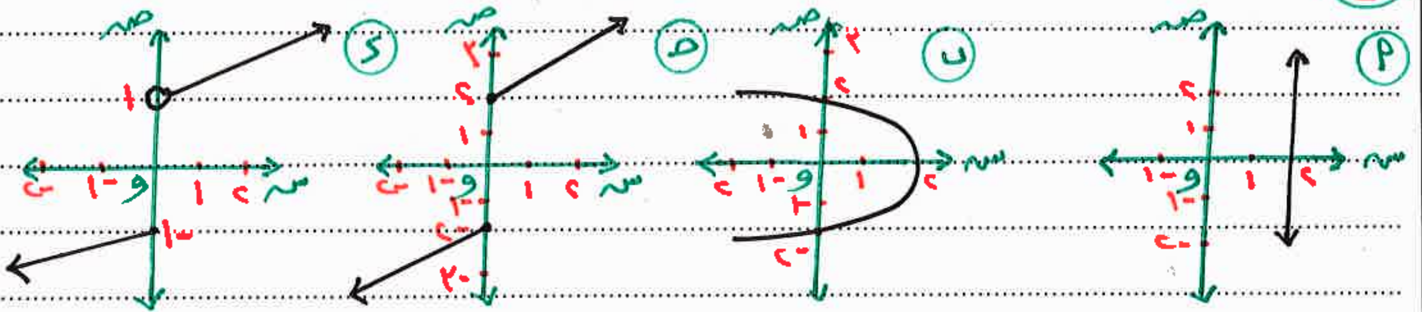
أ) ص = ٣س + ١  ب) ص = س² − ٤

ج) س = ص² − ٢  د) ص = جا س

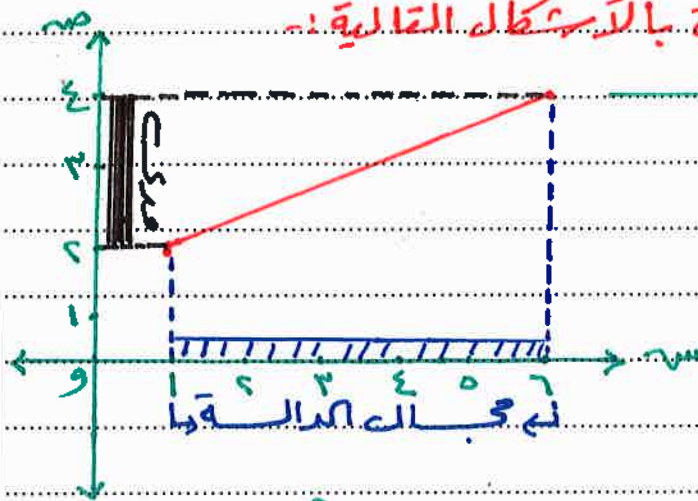


الرياضيات .. أسلوب حياه !

**تدريب ٤** جميع الأشكال التالية لا يمثل دالة ماعدا ....




**تدريب ٥** عين مجال ومدى الدوال الممثلة بالأشكال التالية:-




الحل

المجال نبحث على محور السينات

∴ المجال س ∈ [١ ، ٦]

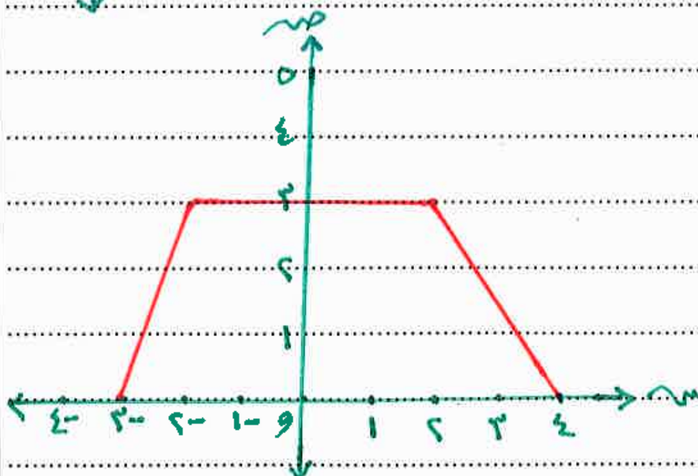
المدى: نبحث على محور الصادات

[٢ ، ٤]

(٢)

المجال :

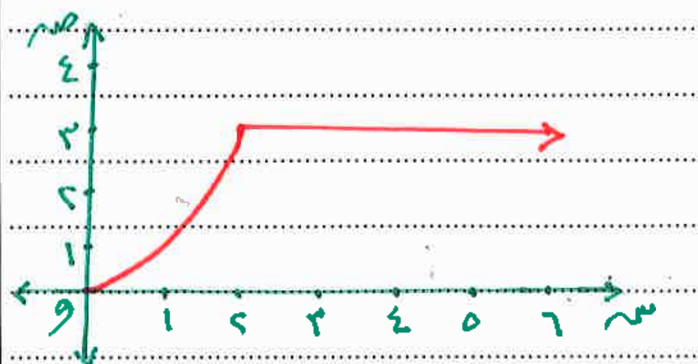
المدى :




(٣)

المجال :

المدى :



# العمليات على الدوال

## تعيين مجال الدالة

### ١ الدوال كثيرة الحدود

* مجال أي دالة كثيرة حدود هو ح

١) د(س) = ٤ ثابتة

٢) د(س) = س + ٥ خطية

٣) د(س) = س² + ١ تربيعية

٤) د(س) = س³ + ٤ تكعيبية

### ٢ الدوال الجذرية

د(س) = ن√ر(س) حيث ن ∈ ص⁺ ، ن > ١

ر(س) دالة كثيرة حدود

١) إذا كانت ن عدد فردي ∴ مجالها ح

٢) إذا كانت ن عدد زوجي ∴ نضع ر(س) ≥ ٠ ونوجد قيم س

### ٣ الدالة الكسرية

د(س) = ر(س) / هـ(س) حيث ر ، هـ كثيرتي حدود

مجالها ح − {أصفار المقام}

## تدريب ١ عين مجال الدوال التالية:

١) د(س) = √س

نضع س ≥ ٠ ∴ المجال [٠ ، ∞[

٢) د(س) = √(س − ٢)

نضع س − ٢ ≥ ٠

س ≥ ٢ ∴ المجال [٢ ، ∞[

٣) د(س) = √(٣ − س)

نضع ٣ − س ≥ ٠

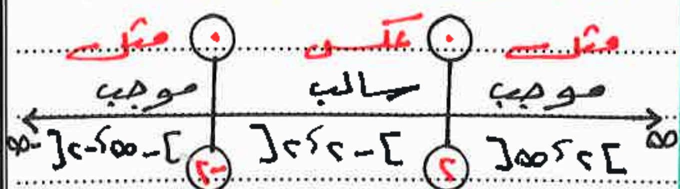
٣ ≥ س ∴ المجال ]−∞ ، ٣]

٤) د(س) = √(س² − ٤)

نضع س² − ٤ ≥ ٠ متباينة درجة ثانية

نبحث إشارة المقدار د(س) = س² − ٤

جذري المعادلة هما −٢ ، ٢




∴ المجال هو قيم س التي تجعل المقدار موجباً وصفر

∴ المجال ح − ]−٢ ، ٢[

٥) $د(س) = \sqrt[3]{س + ٥}$

∵ دليل الجذر ③ فردي

∴ مجال الدالة هو ح

٦) $د(س) = \frac{س + ٥}{س}$

دالة كسرية ∴ أصفار المقام س = ٠

∴ المجال هو ح − {٠}

٧) $د(س) = \frac{س + ٢}{س - ٤}$

دالة كسرية ∴ أصفار المقام س = ٤

∴ المجال هو ح − {٤}

٨) $د(س) = \frac{س + ٧}{س^٢ - ٤}$

دالة كسرية ∴ أصفار المقام: $س^٢ - ٤ = ٠$

س = −٢ ، س = ٢

∴ المجال هو ح − {−٢ ، ٢}

٩) $د(س) = \frac{س + ٥}{س^٢ + ٤}$

دالة كسرية ∴ أصفار المقام: $س^٢ + ٤ = ٠$

∴ لا يوجد أصفار للمقام

∴ مجال الدالة ح

* إذا كانت د ، ر دالتين مجالهما م١ ، م٢ على الترتيب فإن:

١) $(د \pm ر)(س) = د(س) \pm ر(س)$

٢) $(د . ر)(س) = د(س) \times ر(س)$

تكونان دوال حقيقية مجالها م١ ∩ م٢

٣) $(\frac{د}{ر})(س) = \frac{د(س)}{ر(س)}$ حيث $ر(س) \neq ٠$

مجالها م١ ∩ م٢ − {أصفار المقام}

تدريب ٢ عين مجال الدوال التالية

١) $د(س) = \sqrt{س - ٢} + ٧$

لاحظ د(س) عبارة عن مجموع دالتين

$د_١(س) = \sqrt{س - ٢}$ مجالها م١ = [٢ ، ∞[

$د_٢(س) = ٧$ مجالها م٢ = ح

∴ مجال د(س) هو م١ ∩ م٢

= [٢ ، ∞[ ∩ ح

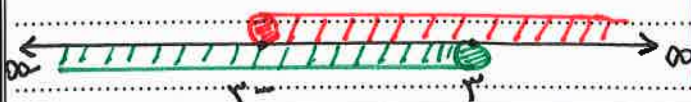
= [٢ ، ∞[

٢) $د(س) = \sqrt{س + ٣} + \sqrt{٣ - س}$

نضع س + ٣ ≥ ٠ ∴ م١ = [−٣ ، ∞[

نضع ٣ − س ≥ ٠ ∴ م٢ = ]−∞ ، ٣]

∴ المجال م١ ∩ م٢ = [−٣ ، ٣]



٣) د(س) = $\frac{\text{س} + ٢}{\sqrt{\text{س} + ٥}}$

لاحظ د(س) ليست دالة كسرية ولكنها عملية قسمة دالتين

مجال البسط م١ = ح

مجال المقام م٢ = $[-٥ ، \infty[$

أصفار المقام $\{-٥\}$

∴ مجال الدالة: ح ∩ $[-٥ ، \infty[$ − $\{-٥\}$

= $]-٥ ، \infty[$

---

٤) د(س) = $\frac{\sqrt{\text{س} + ١}}{\sqrt{\text{س} - ٣}}$

مجال البسط م١ = $[-١ ، \infty[$

مجال المقام م٢ = $[٣ ، \infty[$

أصفار المقام $\{٣\}$

∴ مجال الدالة هو: $[-١ ، \infty[ \cap [٣ ، \infty[ - \{٣\}$

= $]٣ ، \infty[$

---

٥) إذا كانت: د : $[-٥ ، ٣]$ ← ح ، د(س) = س$^{٢}$ + ٧

ر : $[-١ ، ٧]$ ← ح حيث ر(س) = س$^{٢}$ − ٤

أوجد $(\frac{\text{د}}{\text{ر}})$(س) وعين المجال

لاحظ: م١ = $[-٥ ، ٣]$

م٢ = $[-١ ، ٧]$

∴ $(\frac{\text{د}}{\text{ر}})$(س) = $\frac{\text{س}^{٢} + ٧}{\text{س}^{٢} - ٤}$

مجالها : م١ ∩ م٢ − $\{-٢ ، ٢\}$

= $[-١ ، ٣] - \{-٢ ، ٢\}$

---

**تدريب للطلبة**

١) مجال الدالة د(س) = س$^{٢}$ + ٣ هو ......

(أ) $\{-٣\}$ (ب) ح − $\{-٣\}$

(ج) $[-٣ ، \infty[$ (د) ح

٢) مجال الدالة د(س) = $\sqrt{\text{س} + ٣}$ هو

(أ) $\{-٣\}$ (ب) ح − $\{-٣\}$

(ج) $[-٣ ، \infty[$ (د) ح

٣) مجال الدالة د(س) = $\sqrt[٣]{\text{س} + ٣}$ هو

(أ) $\{-٣\}$ (ب) ح − $\{-٣\}$

(ج) $[-٣ ، \infty[$ (د) ح

٤) مجال الدالة: د(س) = $\sqrt{\text{س} - ٤}$ + ٧ هو

(أ) ح (ب) $[٤ ، \infty[$

(ج) $]٤ ، \infty[$ (د) $]-\infty ، ٤]$

٥) مجال الدالة د(س) = $\frac{\sqrt{\text{س} - ٢}}{\text{س} - ٥}$ هو

(أ) ح − $\{٥\}$ (ب) $[٢ ، \infty[$

(ج) $[٢ ، \infty[ - \{٥\}$ (د) $]٢ ، \infty[ - \{٥\}$

# تركيب دالتين

إذا كانت د ، ر دالتين فإن تركيب الدالة د مع الدالة ر ينتج دالة جديدة يرمز لها (د ∘ ر) أي (د ∘ ر)(س) = د(ر(س))

## خطوات تعيين المجال

(١) نوجد مجال ر ← م١

(٢) نوجد مجال الدالة بعد التركيب ← م٢

(٣) المجال المطلوب : م١ ∩ م٢

**ملحوظة** شرط تركيب (د ∘ ر) أن يكون مدى الدالة ر ∩ مجال الدالة د ≠ ∅

---

**تدريب ١** إذا كانت : د(س) = ٢س + ١ ، ر(س) = س² − ٣ أوجد

(١) (د ∘ ر)(س) (٢) (ر ∘ د)(س)

**الحل**

(١) (د ∘ ر)(س) = د[ر(س)]

= د(س² − ٣)

نروح للدالة د ونعوض عن س ب (س² − ٣)

= ٢(س² − ٣) + ١

∴ (د ∘ ر)(س) = ٢س² − ٥

(٢) (ر ∘ د)(س) = ر(د(س))

= ر(٢س + ١)

= (٢س + ١)² − ٣

∴ (ر ∘ د)(س) = ٤س² + ٤س − ٢

---

**تدريب ٢** إذا كانت د(س) = س² + ٦ ، ر(س) = ٣س أوجد :

(١) (د ∘ ر)(٣)

(١) قيم س التي تجعل (د ∘ ر)(س) = ٤٢

**الحل**

(١) (د ∘ ر)(٣) = د(ر(٣))

نوجد ر(٣) = ٣ × ٣ = ٩

∴ (د ∘ ر)(٣) = د(٩)

نوجد د(٩) = (٩)² + ٦ = ٨٧

∴ (د ∘ ر)(٣) = ٨٧

(٢) ∵ (د ∘ ر)(س) = د(ر(س))

= د(٣س)

∴ (د ∘ ر)(س) = ٩س² + ٦

∴ ٤٢ = ٩س² + ٦

∴ س² = ٤ ⇐ س = ±٢

---

**تدريب ٣** إذا كان : د(س) = √س ، ر(س) = س² فإن : مجال (ر ∘ د) =

(أ) ]−∞ ، ٢] (ب) [٠ ، ∞[

(ج) ح⁺ (د) ح

**الحل**

(١) نوجد مجال د م١ = [٠ ، ∞[

(٢) نوجد (ر ∘ د)(س)

$(ر \circ د)(س) = ر(د(س))$

$= ر(\sqrt{س})$

$= (\sqrt{س})^{٢}$

$= س$ مجالها $م_٢ = ح$

٣) ∴ المجال هو: $م_١ \cap م_٢$

$= [٠ ، \infty[ \cap ح$

$= [٠ ، \infty[$

---

**تدريب ٤** إذا كانت $د(١) = ٤$ ، $ر(٤) = ٧$ فإن: $(ر \circ د)(١) =$

(أ) ١ (ب) ٤

(ج) ٧ (د) ١١

**الحل**

∵ $(ر \circ د)(١) = ر(د(١))$

$= ر(٤)$

∴ $(ر \circ د)(١) = ٧$

---

**تدريب ٥** إذا كان $د(س) = \sqrt[٣]{س}$ ، $ر(س) = س^{٣}$ فإن $(د \circ ر)(س) =$

(أ) س (ب) $س^{٣}$

(ج) $\sqrt[٣]{س}$ (د) $|س|$

**الحل**

$(د \circ ر)(س) = د(ر(س))$

$= د(س^{٣})$

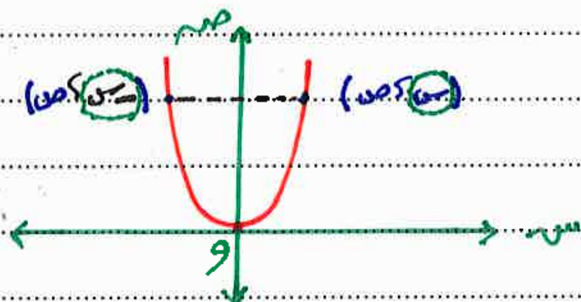
$= \sqrt[٣]{س^{٣}}$

∴ $(د \circ ر)(س) = س$

---

## الدوال الزوجية والدوال الفردية

١) يقال أن الدالة د **زوجية** إذا كانت: $د(-س) = د(س)$ لكل س ، -س ∈ للمجال




لكل (س ، ص) ∈ د فإن: (-س ، ص) ∈ د

أي: منحنى الدالة متماثل حول محور الصادات

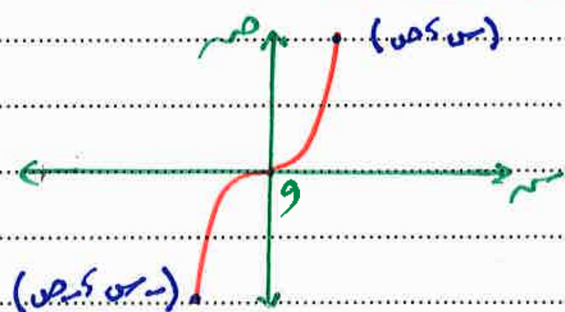
**لاحظ** لكي تكون الدالة زوجية:

(س ، ص)

(-س ، ص)

---

٢) يقال للدالة د أنها **فردية** إذا كانت: $د(-س) = -د(س)$ لكل س ، -س ∈ للمجال




لكل (س ، ص) ∈ د

فإن (-س ، -ص) ∈ د

المنحنى متماثل حول نقطة الأصل

## ملاحظات

(١) عند بحث نوع الدالة لازم يكون لصدين
س ، -س ∈ مجال الدالة بمعنى يكون المجال
ح أو ح$^*$ أو [-أ ، أ] أو ]-أ ، أ[

(٢) إذا كان: د(-س) ≠ د(س) ≠ -د(س)
فإن الدالة ليست زوجية وليست فردية

(٣) من خواص الدوال المثلثية سابقاً:

* جا(-س) = -جاس ...... فردية
* جتا(-س) = جتاس ...... زوجية
* ظا(-س) = -ظاس ...... فردية

**تدريب ١:** ابحث نوع كل من الدوال التالية من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك

(١) د(س) = س$^{2}$ + جتاس

د(-س) = (-س)$^{2}$ + جتا(-س)
د(-س) = س$^{2}$ + جتاس
∴ د(-س) = د(س) ...... زوجية

(٢) د(س) = س$^{3}$ - جاس

د(-س) = (-س)$^{3}$ - جا(-س)
د(-س) = -س$^{3}$ + جاس
∴ د(-س) = -د(س) ...... فردية

(٣) د(س) = س$^{3}$ + س$^{2}$ + ظاس

د(-س) = (-س)$^{3}$ + (-س)$^{2}$ + ظا(-س)
= -س$^{3}$ + س$^{2}$ - ظاس
∴ د(-س) ≠ د(س) ≠ -د(س)
∴ الدالة ليست زوجية وليست فردية

(٤) د(س) = س$^{2}$ جتاس

د(-س) = (-س)$^{2}$ × جتا(-س)
د(-س) = س$^{2}$ جتاس ...... زوجية

(٥) د(س) = س جتاس

د(-س) = (-س) × جتا(-س)
= -س جتاس
∴ د(-س) = -د(س) ...... فردية

(٦) د(س) = $\frac{\text{جتاس}}{\text{س}^{2}+7}$

د(-س) = $\frac{\text{جتا(-س)}}{(\text{-س})^{2}+7}$

د(-س) = $\frac{\text{جتاس}}{\text{س}^{2}+7}$ ...... زوجية

(٧) د(س) = $\sqrt{\text{س} - 3}$

∴ مجال الدالة [٣ ، ∞[
∴ الدالة ليست زوجية وليست فردية

٨) إذا كانت د : [-٣ ، ٤] ← ح حيث
د(س) = س^٢ + ٥

∵ المجال هو [-٣ ، ٤]
∵ -٤ ∉ للمجال
∴ الدالة ليست زوجية وليست فردية

## خواص هامة

إذا كان: د١ ، د٢ دالة **زوجية**
، ر١ ، ر٢ دالة **فردية**

١) د١ ± د٢ تكون زوجية
٢) ر١ ± ر٢ تكون فردية
٣) د١ ± ر١ ليست زوجية وليست فردية
٤) (د١ × د٢) ، $\frac{د١}{د٢}$ تكون زوجية
٥) (ر١ × ر٢) ، $\frac{ر١}{ر٢}$ تكون زوجية
٦) (د١ × ر١) ، $\frac{د١}{ر١}$ تكون فردية

## الخلاصة

١) زوجية ± زوجية = زوجية
٢) فردية ± فردية = فردية
٣) زوجية × ÷ زوجية = زوجية
٤) فردية × ÷ فردية = زوجية
٥) زوجية × ÷ فردية = فردية

## تدريب للطلبة

١) الدالة الزوجية من بين الدوال التالية هي ..
أ) د(س) = س^٣ ب) د(س) = جاس
جـ) د(س) = س جتاس د) د(س) = س جاس

٢) الدالة الفردية من بين الدوال التالية هي
أ) د(س) = س^٤ جاس ب) د(س) = ظا^٤ س
جـ) د(س) = جتاس د) د(س) = ١

٣) إذا كانت الدالة د دالة زوجية في الفترة [أ ، ب] فإن ب =
أ) أ ب) -أ
جـ) ٢أ د) ٣أ

٤) إذا كانت د دالة زوجية ، ٢ ∈ مجال د
فإن: د(٢) + د(-٢) =
أ) صفر ب) ٤
جـ) ٢ د) ٢ د(٢)

٥) نوع الدالة د(س) = $\frac{جاس}{س}$ هو
أ) زوجية ب) فردية
جـ) لا زوجية ولا فردية د) زوجية وفردية

الرياضيات ...
فكر - فهم - تطبيق

# الدالة الأحادية

الدالة د : س ⟵ ص تسمى دالة أحادية

إذا كان لكل أ ، ب ∈ س ، د(أ) = د(ب)

فإن : أ = ب

أو : لكل أ ، ب ∈ س ، أ ≠ ب

فإن : د(أ) ≠ د(ب)

## * خطوات الدالة الأحادية

(١) نوجد : د(أ) ، د(ب)

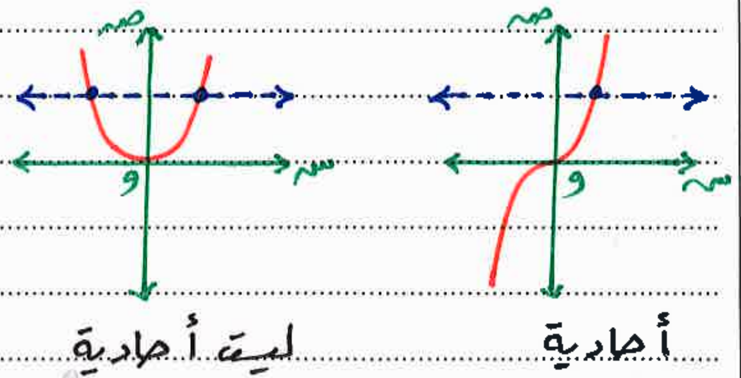
(٢) نضع : د(أ) = د(ب)

(٣) نختصر : بعد الاختصار إذا كان :

أ = ب تكون أحادية

أ ≠ ب تكون ليست أحادية

* بيانياً : باستخدام الخط الأفقي




أحادية — ليست أحادية

**تدريب ١** بين أي الدوال التالية أحادية وأيها ليست أحادية.

(١) د(س) = ٢س − ٣

(١) نوجد : د(أ) = ٢أ − ٣ ، د(ب) = ٢ب − ٣

(٢) نضع : ٢أ − ٣ = ٢ب − ٣

(٣) نختصر : ٢أ = ٢ب

∴ أ = ب دالة أحادية

---

(٢) د(س) = س² + ١

(١) نوجد : د(أ) = أ² + ١ ، د(ب) = ب² + ١

(٢) نضع : أ² + ١ = ب² + ١

(٣) نختصر : أ² = ب²

∴ أ = ± ب ليست أحادية

---

(٣) د(س) = $\frac{1}{س+3}$

(١) نوجد : د(أ) = $\frac{1}{أ+3}$ ، د(ب) = $\frac{1}{ب+3}$

(٢) نضع : $\frac{1}{أ+3} = \frac{1}{ب+3}$

(٣) نختصر : أ + ٣ = ب + ٣

أ = ب أحادية

---

اللهم إن كان من توفيق فمن الله

وإن كان من خطأ أو نسيان فمني والشيطان ...

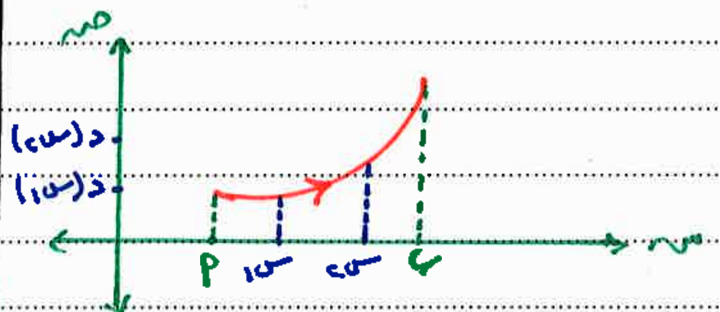


## إطراد الدالة

### تزايد الدالة

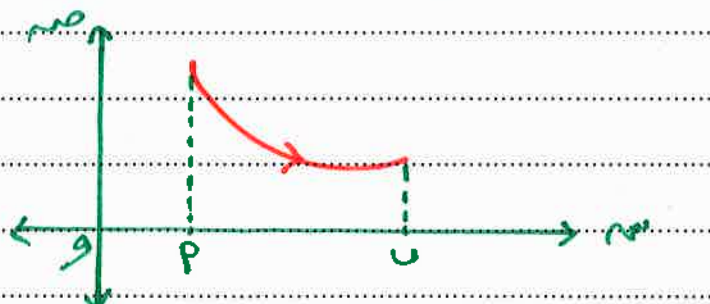
يقال للدالة د أنها تزايدية في الفترة ]أ ، ب[ إذا كان لكل $س_1$ ، $س_2$ ∋ ]أ ، ب[ حيث $س_2 > س_1$ فإن:

د($س_2$) > د($س_1$)




### تناقص الدالة

يقال للدالة د أنها تناقصية في ]أ ، ب[ إذا كان لكل $س_1$ ، $س_2$ ∋ ]أ ، ب[ حيث $س_2 > س_1$ فإن: د($س_2$) < د($س_1$)




### ثبوت الدالة

يقال للدالة د أنها ثابتة في ]أ ، ب[ إذا كان لكل $س_1$ ، $س_2$ ∋ ]أ ، ب[ حيث $س_2 > س_1$ فإن: د($س_2$) = د($س_1$)

## ١ الدالة الثابتة

* الصورة العامة: د(س) = أ حيث أ ∋ ح
* التمثيل البياني: خط مستقيم // محور السينات ويقطع محور الصادات في النقطة (٠ ، أ)
* المجال: ح
* المدى: {أ}
* الاطراد: ثابتة على مجالها ليست أحادية

### تدريب ١

١) إذا كانت: د(س) = ٩ فإن مجال د هو

أ) ح ب) $ح^+$

ج) {٩} د) ح − {٩}

٢) مدى الدالة د(س) = ٣ هو ...

أ) ح ب) $ح^+$

ج) {٣} د) ح − {٣}

٣) الدالة د(س) = −٤ تمثل بيانياً بخط مستقيم يقطع محور الصادات في النقطة ...

أ) (٠ ، ٤) ب) (−٤ ، ٠)

ج) (٠ ، −٤) د) (٤ ، ٠)

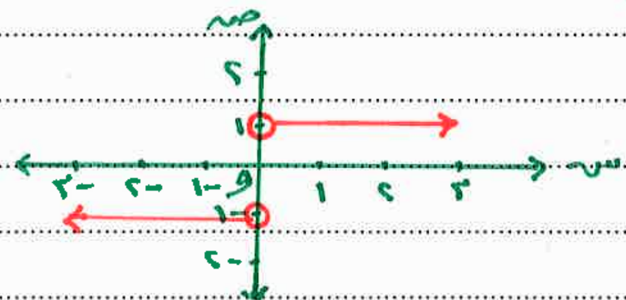
٤) مدى الدالة د(س) = { ٢ ، س > ٠ ؛ −٣ ، س < ٠ } هو ...

(أ) ح - {٠} (ب) {-٣، ٣، ٢}
(ج) ح - {-٣، ٣، ٢} (د) ح

(٥) الدالة د: د(س) = { ٢ ، س ≥ ٠ ؛ -٢ ، س < ٠ }
متماثلة بالنسبة للنقطة ...
(أ) (٢، ٠) (ب) (-٢، ٠)
(ج) (٢، -٢) (د) (٠، ٠)

(٦) مجال الدالة د(س) = { ٤ ، س > ١ ؛ -٤ ، س < ١ }
هو ......
(أ) ح (ب) ح - {٠}
(ج) ح - {١} (د) {-٤، ٤}

(٧) مدى الدالة الممثلة بالشكل المقابل هو...




(أ) {١} (ب) {١، -١}
(ج) {-١} (د) ح

## (٢) الدالة الخطية

* الصورة العامة: د(س) = أ س + ب حيث أ ≠ ٠
* المجال: ح
* المدى: ح
* الاطراد: أ > ٠ تزايدية ، أ < ٠ تناقصية
* النوع: ليست زوجية وليست فردية إلا إذا كان ب = ٠ فردية
* الرسم: خط مستقيم يقطع المحورين أو يمر بنقطة الأصل (ب = ٠)

تدريب (٢): إرسم الشكل البياني للدالة د حيث

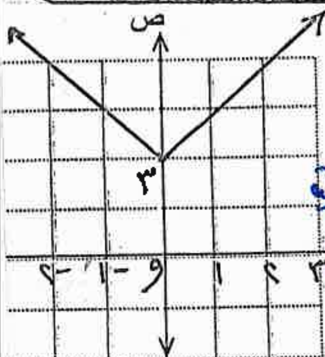
د(س) = { س + ٣ ، س ≥ ٠ ؛ -س + ٣ ، س < ٠ }

ومنها المدى - الاطراد - النوع

**الحل**

ص = س + ٣ | ص = -س + ٣

| س | ٠ | ١ | ٢ | ⓪ | -١ | -٢ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ص | ٣ | ٤ | ٦ | ③ | ٤ | ٦ |




المجال: ح
المدى: [٣، ∞[
الاطراد: ]-∞، ٠[ متناقصة
]٠، ∞[ تزايدية
النوع: زوجية

الدالة ليست أحادية

# حل معادلات ومتباينات القيمة المطلقة

**تعريف** القيمة المطلقة للعدد الحقيقي س (تسمى مقياس العدد) ويرمز له |س|
معناه أكبر العددين س ، -س

|س| = { س ، س ≥ ٠
          -س ، س < ٠

## خواص مقياس العدد الحقيقي

١) |س| ≥ ٠

٢) |س| = |-س|

٣) |أ - س| = |س - أ|

٤) إذا كان: |س| = أ حيث أ > ٠ ، فإن س = ± أ

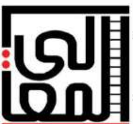
٥) إذا كان: |س| = |أ| فإن: س = ± أ

٦) √(س²) = |س| لأي عدد حقيقي س

٧) |س|² = س² لأي عدد حقيقي س

٨) |س ص| = |س| × |ص|

٩) |س + ص| ≤ |س| + |ص|



## إعادة تعريف المقياس

1. ترتيب س داخل المقياس وجعلها موجبة
2. نوجد صفر المقياس [نجعل ما بداخل المقياس = ٠]
3. نضع ترتيب المقياس على فترتين : | دالة | = { + (دالة) ، س ≤ صفر المقياس ؛ − (دالة) ، س < صفر المقياس }

## حل معادلة المقياس

**حل جبرى**: باستخدام إعادة تعريف المقياس أو يوجد طرق أخرى

**حل بيانى**: نرسم دالة الطرف الأيمن ونرسم دالة الطرف الأيسر ونقط التقاطع نوجد الإحداثى السينى لها

**تدريب 1**: أوجد مجموعة الحل فى ح

(1) |٢س − ١| = ٥

الحل

س ≥ ½ : ٢س − ١ = ٥ ، ٢س = ٦ ، س = ٣

س < ½ : −٢س + ١ = ٥ ، −٢س = ٤ ، س = −٢

م.ح = {٣ ، −٢}

(2) |٣ − ٢س| = ٧

الحل

س ≥ ³⁄₂ : ٢س − ٣ = ٧ ، ٢س = ١٠ ، س = ٥

س < ³⁄₂ : −٢س + ٣ = ٧ ، −٢س = ٤ ، س = −٢

م.ح = {٥ ، −٢}

(3) |س − ٢| + ٢س = ٧

الحل

س ≥ ٢ : س − ٢ + ٢س = ٧ ، ٣س = ٩ ، س = ٣

س < ٢ : −س + ٢ + ٢س = ٧ ، س = ٥ ، ∵ س = ٥ ∉ < ٢

∴ م.ح = {٣}

**ملحوظة:** إذا كان م |أ س + ب| = جـ حيث جـ ∈ ح⁻ فإن م.ح = ∅

(٤) |س − ٣| + ٥ = ٠

الحل

|س − ٣| = −٥ ∈ ح⁻

∴ م.ح = ∅

(٥) |س − ٢| = |س − ٦|

الحل

س + ٢ = س − ٦ ، س + ٢ = −س + ٦

٢ = −٦ مرفوض ، ٢س = ٤

س = ٢

∴ م.ح = {٢}

(٦) √(س² − ٢س + ١) = ٤

الحل

√((س − ١)²) = ٤

|س − ١| = ٤

س ≥ ١ ، س < ١

س − ١ = ٤ ، −س + ١ = ٤

س = ٥ ، س = −٣

م.ح = {٥ ، −٣}

**تدريب ٢: اختر الإجابة الصحيحة**

(١) مجموعة حل المعادلة: |س − ٢| = ٥ في ح هي

(أ) {٧} (ب) {−٣} (جـ) {٧ ، −٣} (د) [٧ ، −٣]

(٢) مجموعة حل المعادلة ٥|س − ١| + ٤ = ١ في ح هي

(أ) {−٤/٥ ، ٦/٥} (ب) ∅ (جـ) {٦/٥} (د) {−٤/٥}

(٣) مجموعة حل المعادلة: |س| + س = ٠ هي

(أ) {٠} (ب) ]−∞ ، ٠] (جـ) ]−∞ ، ٠[ (د) ∅

(٤) مجموعة حل المعادلة |٢س − ٤| = |س + ١| هي

(أ) {١ ، ٥} (ب) {٥ ، −١} (جـ) {١ ، −٥} (د) {−٥ ، −١}

(٥) مجموعة حل المعادلة: |٢س + ٥| = ٧ في ح هي

(أ) {١ ، −٦} (ب) {٦} (جـ) {١} (د) {−١}

(٦) العبارة الخطأ فيما يلي هي

(أ) |س ص| = |س| × |ص| (ب) |−س| = |س|

(جـ) |س + ص| = |س| + |ص| (د) √(س²) = |س|

# متباينة المقياس

① إذا كان |س| ≤ أ فإن: −أ ≤ س ≤ أ

② إذا كان |س| ≥ أ فإن: س ≥ أ أو س ≤ −أ

**تدريب ١** أوجد مجموعة الحل في ح

① |س − ٢| < ٣

الحل

−٣ < س − ٢ < ٣
٢ ٢ ٢

−١ < س < ٥

م.ح = ]−١ ، ٥[

② |٢س + ١| ≤ ٧

الحل

−٧ ≤ ٢س + ١ ≤ ٧
(−١) −١ −١ −١

−٨ ≤ ٢س ≤ ٦ ÷٢

−٤ ≤ س ≤ ٣

∴ م.ح = [−٤ ، ٣]

③ |٣ − ٢س| ≤ ٥

الحل

نرتب المقياس: |٢س − ٣| ≤ ٥

−٥ ≤ ٢س − ٣ ≤ ٥
٣ ٣ ٣

−٢ ≤ ٢س ≤ ٨ ÷٢

−١ ≤ س ≤ ٤

م.ح = [−١ ، ٤]

④ √(٤س² − ١٢س + ٩) < ٩

الحل

√((٢س − ٣)²) < ٩

|٢س − ٣| < ٩

−٩ < ٢س − ٣ < ٩
٣ ٣ ٣

−٦ < ٢س < ١٢ ÷٢

−٣ < س < ٦

م.ح = ]−٣ ، ٦[

⑤ |س − ١| − ٣ < ١ − |١ − س|

الحل

|س − ١| + |١ − س| < ١ + ٣

٢|س − ١| < ٤ ÷٢

|س − ١| < ٢

−٢ < س − ١ < ٢
١ ١ ١

−١ < س < ٣

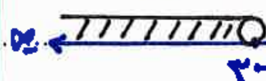
م.ح = ]−١ ، ٣[

(٦) |س - ٦| > ٥

الحل

س - ٦ > ٥ أو س - ٦ < -٥

س > ١١ أو س < ١





م.ح = ح - [١ ، ١١]

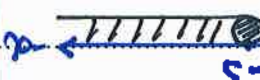
(٧) |٢س - ٥| ≥ ٩

الحل

٢س - ٥ ≥ ٩ أو ٢س - ٥ ≤ -٩

٢س ≥ ١٤ أو ٢س ≤ -٤

س ≥ ٧ أو س ≤ -٢





م.ح = ح - ]-٢ ، ٧[

(٨) $\sqrt{(س+٢)^2}$ + |٢س + ٤| ≥ ٦

الحل

|س + ٢| + ٢|س + ٢| ≥ ٦

٣|س + ٢| ≥ ٦ ÷ ٣

|س + ٢| ≥ ٢

س + ٢ ≥ ٢ أو س + ٢ ≤ -٢

س ≥ ٠ أو س ≤ -٤

م.ح = ح - ]-٤ ، ٠[

(٩) $\frac{١}{|٣س - ١١|}$ > ٥ ، س ≠ $\frac{١١}{٣}$

الحل

|٣س - ١١| < $\frac{١}{٥}$

$-\frac{١}{٥}$ < ٣س - ١١ < $\frac{١}{٥}$

$\frac{٥٤}{٥}$ < ٣س < $\frac{٥٦}{٥}$

$\frac{١٨}{٥}$ < س < $\frac{٥٦}{١٥}$

م.ح = ]$\frac{١٨}{٥}$ ، $\frac{٥٦}{١٥}$[ - {$\frac{١١}{٣}$}

تدريب (٢) إختر الإجابة الصحيحة

(١) مجموعة حل المتباينة |٢ - ٣س| ≥ ٧ هي

(أ) [-$\frac{٥}{٣}$ ، ٣] (ب) ح - [-$\frac{٥}{٣}$ ، ٣]

(ج) ح - ]-$\frac{٥}{٣}$ ، ٣[ (د) Ø

(٢) إذا كانت |س| ≤ أ ، أ ∈ $ح^+$ فإن س ∈

(أ) ح - [-أ ، أ] (ب) [-أ ، أ]

(ج) ح - ]-أ ، أ[ (د) ]-أ ، أ[

(٣) مجموعة حل المتباينة |س - ٢| + |٢ - س| < ٦ في ح هو

(أ) [-١ ، ٥] (ب) ]-١ ، ٥[

(ج) ح - [-١ ، ٥] (د) ح - ]-١ ، ٥[

# التمثيل البياني للدوال

## الدوال

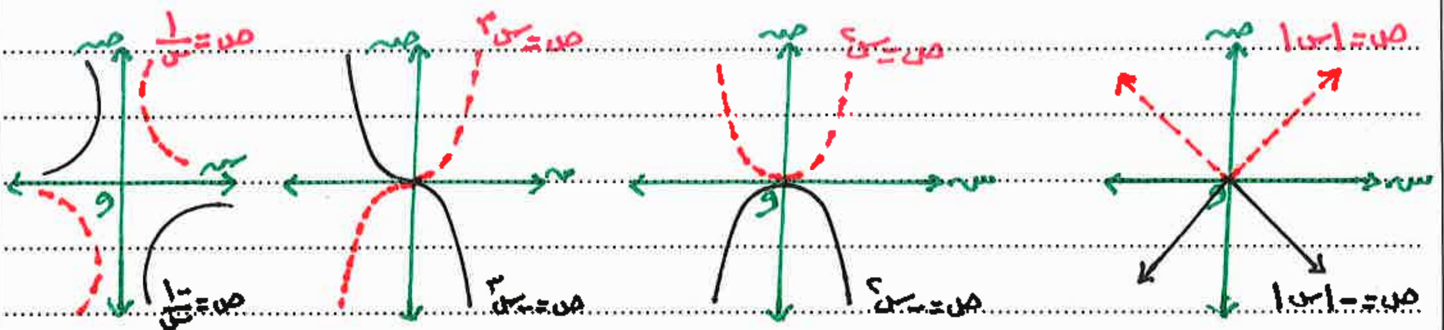
- مقياس: ص = |س|
- تربيعية: ص = س²
- تكعيبية: ص = س³
- كسرية: ص = $\frac{1}{س}$

ترتيب التحويلات على المنحنى ص = د(س) للحصول على المنحنى ص = - د (س + ا) + ج

(١) إنعكاس في محور السينات (٢) إزاحة أفقية (٣) إزاحة رأسية

(١) إنعكاس منحنى الدالة في محور السينات

لأي دالة د يكون المنحنى ص = - د(س) هو نفس المنحنى ص = د(س) بالانعكاس في محور السينات




(٢) الإزاحة الأفقية : لأي دالة د يكون المنحنى ص = د(س + ا) ، ا ∈ ح - {٠} هو نفس المنحنى ص = د(س) بإزاحة أفقية قدرها |ا| وحدة طول

في اتجاه { و س ← يميناً عندما ا < ٠ ، و س' ← يساراً عندما ا > ٠ }

(٣) الإزاحة الرأسية : لأي دالة د يكون المنحنى ص = د(س) + ا ، ا ∈ ح - {٠} هو نفس المنحنى ص = د(س) بإزاحة رأسية قدرها |ا| وحدة طول

في اتجاه { و ص للأعلى عندما ا > ٠ ، و ص' للأسفل عندما ا < ٠ }

# التمثيل البياني لدالة المقياس

$د(س) = |س|$

دالة المقياس في الصورة القياسية لها تمثيل بيانيًا بشعاعين لهما نفس نقطة البداية

نقطة البداية (٠، ٠)

المجال: ح

المدى: [٠، ∞[

الاطراد: ]-∞، ٠] تناقصية

[٠، ∞[ تزايدية

النوع: زوجية

الدالة: ليست أحادية

تدريب ١

باستخدام منحنى الدالة د(س) = |س| ارسم منحنى الدوال التالية مبينًا: المجال - المدى - الاطراد - النوع - التماثل

١) $د(س) = |س| + ٢$

الحل

نقطة البداية: (٠، ٢) إزاحة مقدارها ٢ وحدة في اتجاه و ص



المدى:

الاطراد:

النوع:

معادلة محور التماثل:

٢) $د(س) = |س - ٢|$

الحل

نقطة البداية: (٢، ٠) إزاحة مقدارها ٢ وحدة في اتجاه و س

المدى:

الاطراد:



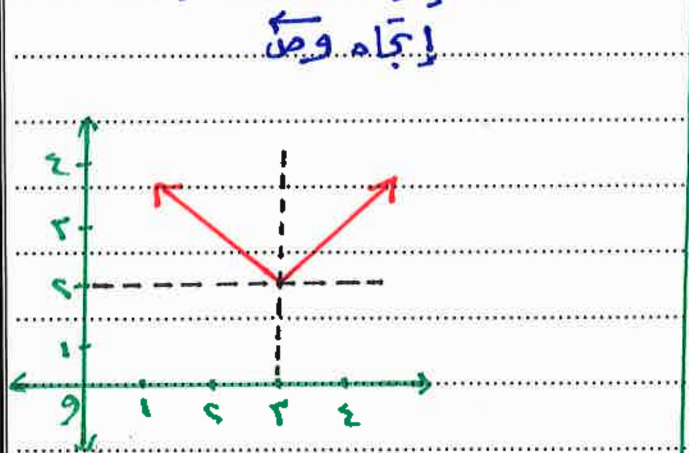
النوع:

معادلة محور التماثل:

٣) $د(س) = |س - ٣| + ٢$

الحل

نقطة البداية: (٣، ٢) إزاحة مقدارها ٣ وحدات في اتجاه و س ثم إزاحة مقدارها ٢ وحدة في اتجاه و ص



المدى:

الاطراد:

النوع:

معادلة محور التماثل:

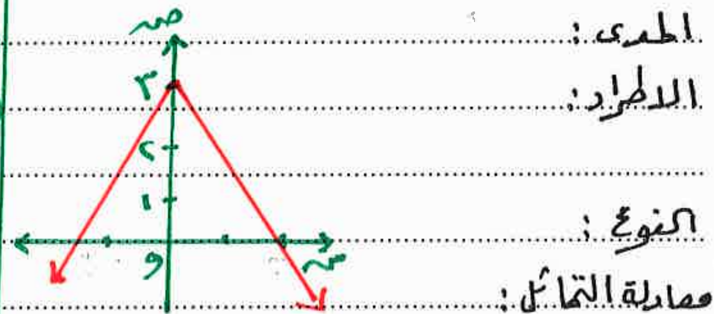
٤) د(س) = ٣ − |س|

الحل

نقطة البداية : (٠ ، ٣) إنعكاس على محور السينات ثم إزاحة مقدارها ٣ وحدات في إتجاه و ص⃖

المدى :

الإطراد :



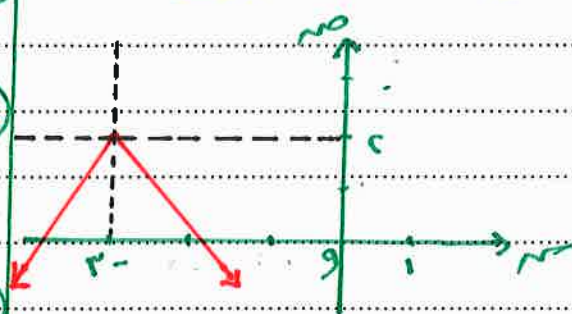
النوع :

معادلة التماثل :

٥) د(س) = ٢ − |س + ٣|

الحل

نقطة البداية : (−٣ ، ٢) إنعكاس على محور السينات ثم إزاحة مقدارها ٣ وحدات في اتجاه و س⃖ ثم إزاحة مقدارها وحدة في اتجاه و ص⃖



المدى :

الإطراد :

النوع :

معادلة محور التماثل :

تدريب ٢

اختر الإجابة الصحيحة

١) في الشكل المقابل تكون الدالة تناقصية في الفترة ........



(أ) ]−١ ، ∞[   (ب) ]٠ ، ١[

(جـ) ]−∞ ، ∞[   (د) ]−∞ ، ١[

٢) إذا كانت الدالة د حيث د(س) = ٣ − |س − ١| فإنها تكون تزايدية في الفترة ........

(أ) ]−∞ ، ٣[   (ب) ]−∞ ، ١[

(جـ) ]١ ، ∞[   (د) ]٣ ، ∞[

٣) نقطة رأس المنحنى د(س) = |س + ٣| − ٢ هي ........

(أ) (٣ ، ٢)   (ب) (−٣ ، −٢)

(جـ) (−٣ ، ٢)   (د) (٣ ، −٢)

٤) منحنى الدالة ر : ر(س) = |س + ٣| هو نفسه منحنى د(س) = |س| بإزاحة مقدارها ٣ وحدات في اتجاه ........

(أ) و س⃖   (ب) و س⃗

(جـ) و ص⃖   (د) و ص⃗

٥) مدى الدالة د : د(س) = |س| − ٢ هو ........

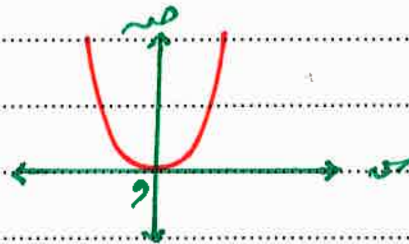
(أ) ]٠ ، ∞[   (ب) [٢ ، ∞[

(جـ) [٠ ، ∞[   (د) ]٢ ، ∞[

# الدالة التربيعية

$د(س) = س^2$

نقطة رأس المنحنى: (٠، ٠)



المدى: [٠، ∞[

الاطراد: ]-∞، ٠[ تناقصية

[٠، ∞[ تزايدية

النوع: زوجية

محور التماثل: محور الصادات (س = ٠)

تدريب ١

باستخدام منحنى الدالة د: د(س) = س²

إرسم منحنى الدوال التالية مبيناً

المدى - الاطراد - النوع

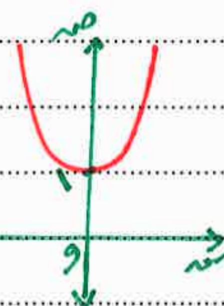
① $د(س) = س^2 + 1$

الحل

نقطة رأس المنحنى: (٠، ١) إزاحة مقدارها ١ في إتجاه وص

المدى:

الاطراد:



النوع:

معادلة محور التماثل:

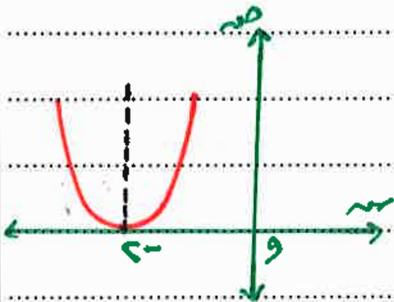
② $د(س) = (س + 2)^2$

الحل

نقطة رأس المنحنى: (-٢، ٠) إزاحة مقدارها ٢ وحدة في إتجاه وس←

المدى:

الاطراد:



النوع:

معادلة التماثل:

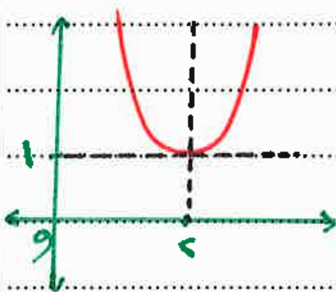
③ $د(س) = (س - 2)^2 + 1$

الحل

نقطة رأس المنحنى: (٢، ١) إزاحة مقدارها ٢ وحدة في إتجاه وس ثم إزاحة مقدارها ١ في إتجاه وص

المدى:

الاطراد:



النوع:

معادلة التماثل:

④ $د(س) = 3 - س^2$

الحل

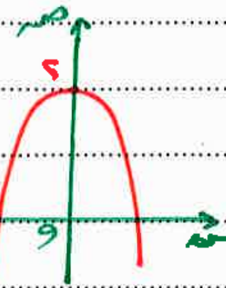
نقطة رأس المنحنى: (٠، ٣) إنعكاس على محور السينات ثم إزاحة مقدارها ٣ وحدات في إتجاه وص

المدى:

الإطراد:

النوع:

معادلة محور التماثل:



⑤ $د(س) = ٢ - (س - ١)^٢$

**الحل**

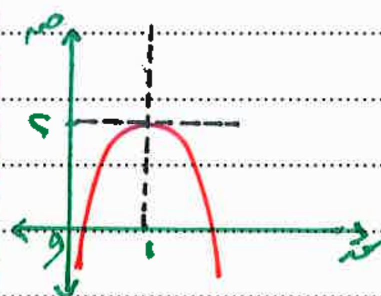
نقطة رأس المنحنى: (١ ، ٢) إنعكاس على محور السينات ثم إزاحة مقدارها ١ وحدة في اتجاه و تحت ثم إزاحة مقدارها ٢ وحدة في اتجاه وص

المدى:

الاطراد:

النوع:

معادلة محور التماثل:



⑥ $د(س) = س^٢ - ٢س + ٣$

**الحل**

نجعل الدالة على الصورة القياسية

$د(س) = س^٢ - ٢س + ١ + ٣ - ١$

بإضافة وطرح (١) للدالة

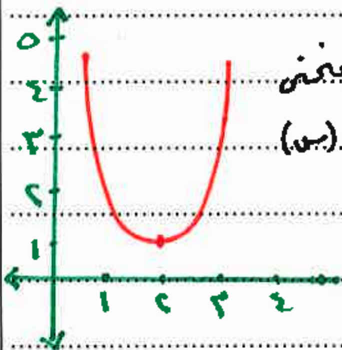
$د(س) = (س - ١)^٢ + ٢$

نقطة رأس المنحنى: (١ ، ٢) نكمل الحل

تدريب ٢

## إختر الإجابة الصحيحة:

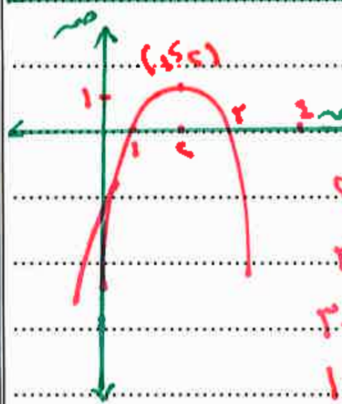
① الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة التربيعية ص = د(س) فإن قاعدة الدالة هي .........



(أ) $د(س) = (س - ١)^٢ + ٢$ (ب) $د(س) = (س - ٢)^٢ + ١$

(ج) $د(س) = (س - ١)^٢ - ٢$ (د) $د(س) = (س - ٢)^٢ - ١$

② الشكل المقابل المنحنى يمثل الدالة .........



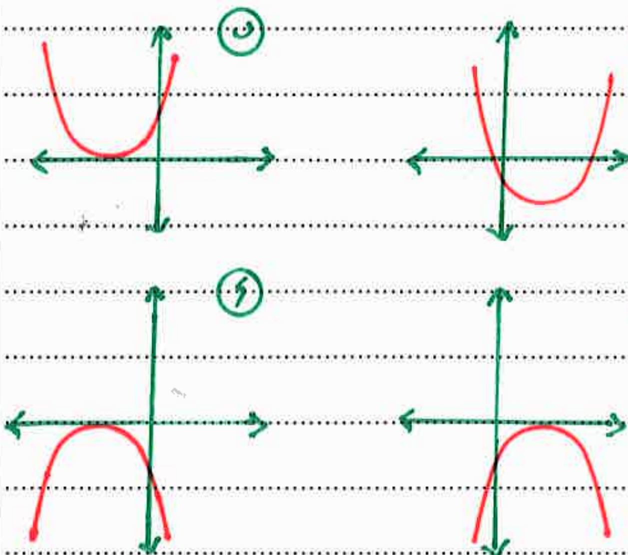
(أ) $د(س) = -(س - ١)^٢ + ٢$

(ب) $د(س) = -س^٢ + ٤س - ٣$

(ج) $د(س) = -س^٢ - ٤س + ٣$

(د) $د(س) = -(س - ٢)^٢ - ١$

③ الشكل الذي يمثل منحنى الدالة: $د(س) = -(س - ١)^٢$ هو



# الدالة التكعيبية

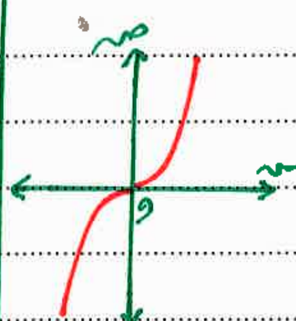
**د(س) = س³**

نقطة التماثل: (٠، ٠)

المدى: ح

الاطراد: تزايدية على ح

النوع: فردية




**١) د(س) = س³ + ١**

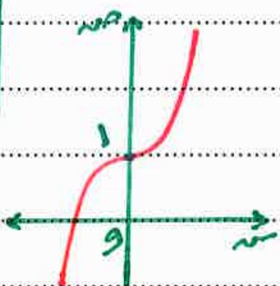
الحل

نقطة التماثل: (٠، ١) إزاحة مقدارها ١ في اتجاه و ص←

المدى: ح

الاطراد: تزايدية على ح

النوع: ليست زوجية وليست فردية




**٢) د(س) = (س + ٢)³**

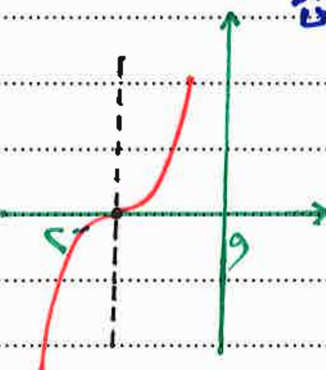
الحل

نقطة التماثل: (-٢، ٠) إزاحة مقدارها ٢ وحدة في اتجاه و س←

المدى:

الاطراد:

النوع:




**٣) د(س) = (س - ٢)³ + ١**

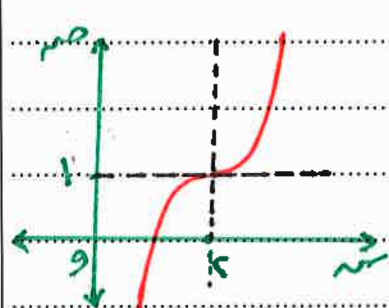
الحل

نقطة التماثل: (٢، ١) إزاحة مقدارها ٢ وحدة في اتجاه و س→ ثم إزاحة مقدارها وحدة في اتجاه و ص←

المدى:

الاطراد:

النوع:




**٤) د(س) = ٢ - س³**

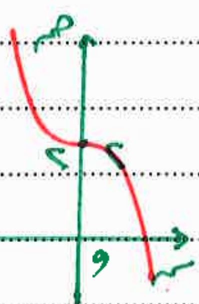
الحل

نقطة التماثل: (٠، ٢) إنعكاس على محور السينات ثم إزاحة مقدارها ٢ في اتجاه و ص←

المدى:

الاطراد:

النوع:




**٥) د(س) = -(س - ٢)³**

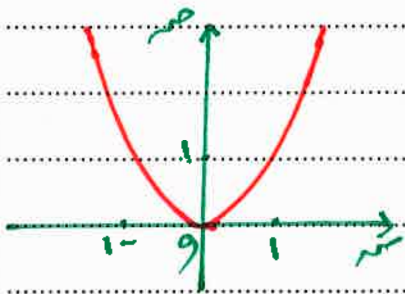
الحل

نقطة التماثل: (٢، ٠) إنعكاس على محور السينات ثم إزاحة مقدارها ٢ وحدة في اتجاه و س←

# دالة المقياس في صورة غير قياسية

لرسم دالة المقياس التي في صورة غير قياسية نتبع الآتي:

1. نوجد المجال
2. نعيد تعريفها على قاعدتين
3. نختصر كل قاعدة
4. نعمل جدول لكل قاعدة



المدى:

الاطراد:

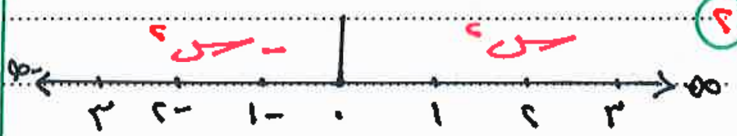
النوع:

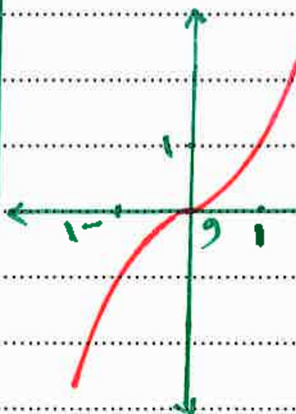
(١) د(س) = س |س|

**الحل**

(١) المجال: ح

(٢)



المدى: ح

الاطراد: تزايدية على ح

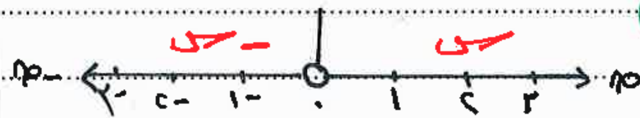
النوع: فردية

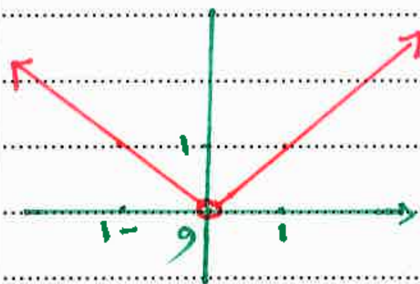
(٣) د(س) = س² / س حيث س ≠ ٠

**الحل**

(١) المجال: ح − {٠}

(٢)



المدى:

الاطراد:

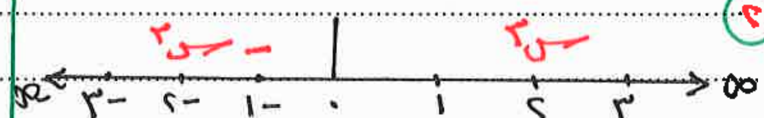
النوع:

(٢) د(س) = س² |س|

**الحل**

(١) المجال: ح

(٢)




(٤) د(س) = |س| / س حيث س ≠ ٠

**الحل**

# الدالة الكسرية

د(س) = $\frac{1}{س}$ صورة قياسية

نقطة التماثل : (٠، ٠)

المجال : ح − {٠}

المدى : ح − {٠}

الاطراد : ]−∞، ٠[ تناقصية

]٠، ∞[ تناقصية

النوع : فردية




① د(س) = $\frac{1}{س}$ + ٢

نقطة التماثل : (٠، ٢) إزاحة مقدارها ٢ وحدة في إتجاه وص↑

المجال :

المدى :

الاطراد :

النوع :

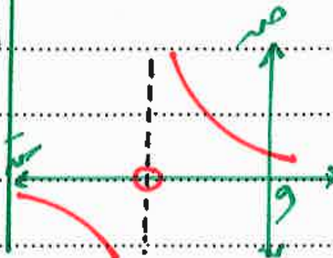
② د(س) = $\frac{1}{س+٢}$

نقطة التماثل : (−٢، ٠) إزاحة مقدارها ٢ وحدة في إتجاه وس←

المجال :

المدى :

الاطراد :



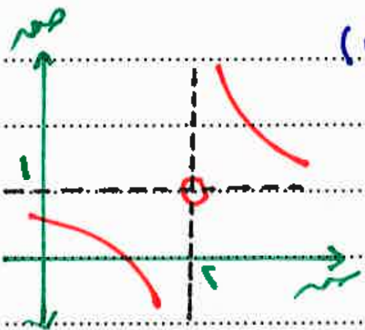

③ د(س) = $\frac{1}{س-٢}$ + ١

نقطة التماثل : (٢، ١)

المجال :

المدى :

الاطراد :




④ د(س) = $-\frac{1}{س}$

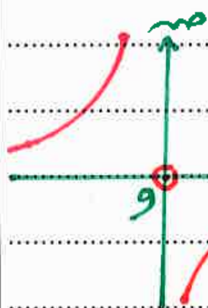
نقطة التماثل : (٠، ٠) إنعكاس على محور السينات

المجال : ح − {٠}

المدى : ح − {٠}

الاطراد : ]−∞، ٠[ تزايدية

]٠، ∞[ تزايدية



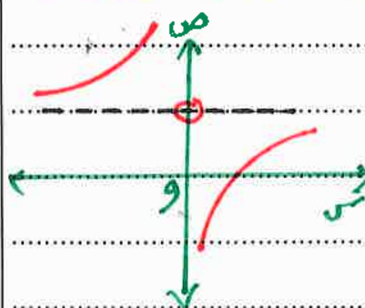

⑤ د(س) = ٣ − $\frac{1}{س}$

نقطة التماثل : (٠، ٣) انعكاس على محور السينات

المجال :

المدى :

الاطراد :



# الأسس الكسرية

**تعريف** (١) إذا كان: $ن \in ص^+ - \{1\}$ ، $أ \in ح$ فإن: $أ^{\frac{1}{ن}} = \sqrt[ن]{أ}$

(٢) إذا كان م، ن عددين صحيحين ليس بينهما عامل مشترك، $ن > 1$ ، $\sqrt[ن]{أ} \in ح$
فإن: $أ^{\frac{م}{ن}} = (\sqrt[ن]{أ})^م = \sqrt[ن]{أ^م}$

**ملحوظة** إذا كان: ن عدد زوجي ، $أ < 0$ فإن: $أ^{\frac{1}{ن}} = \sqrt[ن]{أ} \notin ح$

**مثال**
(١) $25^{\frac{1}{2}} = \sqrt{25} = 5 \in ح$
(٢) $(-9)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{-9} \notin ح$

**خواص الجذور النونية**
إذا كان: أ، ب عددين حقيقيين، $\sqrt[ن]{أ}$ ، $\sqrt[ن]{ب} \in ح$ فإن:

(١) $\sqrt[ن]{أب} = \sqrt[ن]{أ} \times \sqrt[ن]{ب}$ (٢) $\sqrt[ن]{\frac{أ}{ب}} = \frac{\sqrt[ن]{أ}}{\sqrt[ن]{ب}}$

**تدريب ١**
(١) $\sqrt[3]{27 أ^6 ب^9} = \sqrt[3]{27} \times \sqrt[3]{أ^6} \times \sqrt[3]{ب^9} = 3 أ^2 ب^3$
(٢) $\sqrt[4]{81 س^4 ص^{16}} = \sqrt[4]{81} \times \sqrt[4]{س^4} \times \sqrt[4]{ص^{16}} = 3|س| ص^4$

**قوانين الأسس**
(١) $أ^{صفر} = 1$ (٢) $أ^ن \times أ^م = أ^{ن+م}$ (٣) $\frac{أ^م}{أ^ن} = أ^{م-ن}$
(٤) $(أ^م)^ن = أ^{م ن}$ (٥) $(أب)^ن = أ^ن ب^ن$ (٦) $(\frac{أ}{ب})^ن = \frac{أ^ن}{ب^ن}$

**تدريب ٢**

(١) $\sqrt{س} \times \sqrt[3]{س} = س^{\frac{1}{2}} \times س^{\frac{1}{3}} = س^{\frac{5}{6}}$

(٢) $(\sqrt[5]{س})^{2} \times \sqrt[3]{س^{2}} = س^{\frac{2}{5}} \times س^{\frac{2}{3}} = س^{\frac{16}{15}}$

---

## المعادلات الأسية

(١) **المعادلة : $س^{ن} = أ$** حيث $أ \in ح$ ، $ن \in ص^{+}$ لها ن من الجذور

| المعادلة | عدد الجذور | عدد الجذور الحقيقية | عدد الجذور المركبة |
|---|---|---|---|
| (١) ن عدد زوجي | | | |
| $س^{ن} = أ$ ، $أ > ٠$ | ن | جذران | (ن − ٢) |
| $أ < ٠$ | ن | ليس لها جذور (صفر) | ن |
| (٢) ن فردي | | | |
| $س^{ن} = أ$ ، $أ \neq ٠$ | ن | واحد | (ن − ١) |

**تدريب ٢**

(١) المعادلة $س^{3} = 8$ عدد جذورها يساوي (أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

(٢) عدد الجذور الحقيقية للمعادلة $س^{4} = -16$ هو (أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٤

---

(٢) **المعادلة : $س^{\frac{م}{ن}} = أ$ فإن $س = أ^{\frac{ن}{م}}$ بشرط م عدد فردي**

**المعادلة : $س^{\frac{م}{ن}} = أ$ فإن $س = \pm أ^{\frac{ن}{م}}$ بشرط م عدد زوجي**

## تدريب ٣ : أوجد مجموعة الحل في ح

① $س^{٤} = ٨١$

الحل

$س = \pm \sqrt[٤]{٨١} = \pm ٣$

$\therefore$ م.ح $= \{\pm ٣\}$

② $س^{٥} = ٢٤٣$

الحل

$س = \sqrt[٥]{٢٤٣} = ٣$

م.ح $= \{٣\}$

③ $٤س^{٥} = -١٢٨$

الحل

$س^{٥} = \frac{-١٢٨}{٤} = -٣٢$

$\therefore س = \sqrt[٥]{-٣٢} = -٢$

م.ح $= \{-٢\}$

④ $س^{\frac{٧}{٢}} = ١٢٨$

الحل

$س = (١٢٨)^{\frac{٢}{٧}} = ٤$

$\therefore$ م.ح $= \{٤\}$

⑤ $س^{\frac{٤}{٣}} = ٨١$

الحل

$س = \pm (٨١)^{\frac{٣}{٤}} = \pm ٢٧$

$\therefore$ م.ح $= \{\pm ٢٧\}$

⑥ $س^{\frac{٢}{٥}} = ١$

الحل

$س^{\frac{٢}{٥}} = ١$

$س = \pm (١)^{\frac{٥}{٢}} = \pm ١$

م.ح $= \{\pm ١\}$

⑦ $(٣س + ٢)^{\frac{٣}{٤}} = ٨$

الحل

$٣س + ٢ = (٨)^{\frac{٤}{٣}}$

$٣س + ٢ = ١٦$

$س = \frac{١٤}{٣}$

م.ح $= \{\frac{١٤}{٣}\}$

## تدريب ٤ : أوجد مجموعة الحل في ح

① $س^{\frac{١}{٢}} + س^{\frac{١}{٤}} - ١٢ = ٠$

الحل

$(س^{\frac{١}{٤}} + ٤)(س^{\frac{١}{٤}} - ٣) = ٠$

تحليل مقدار ثلاثي

$\therefore س^{\frac{١}{٤}} = -٤$ مرفوض

$س^{\frac{١}{٤}} = ٣ \Leftarrow س = ٣^{٤} = ٨١$

$\therefore$ م.ح $= \{٨١\}$

② $س^{\frac{٢}{٣}} - ٤س^{\frac{١}{٣}} + ٣ = ٠$

الحل

$(س^{\frac{١}{٣}} - ٣)(س^{\frac{١}{٣}} - ١) = ٠$

$س^{\frac{١}{٣}} = ٣ \Leftarrow س = ٢٧$

$س^{\frac{١}{٣}} = ١ \Leftarrow س = ١$

③ $س^{\frac{4}{3}} - 10 س^{\frac{2}{3}} + 9 = .$

الحل

$(س^{\frac{2}{3}} - 9)(س^{\frac{2}{3}} - 1) = .$

$س^{\frac{2}{3}} = 9 \Rightarrow س = \pm (9)^{\frac{3}{2}} \Rightarrow س = \pm 27$

$س^{\frac{2}{3}} = 1 \Rightarrow س = \pm (1)^{\frac{3}{2}} \Rightarrow س = \pm 1$

∴ م.ح = $\{\pm 27 ، \pm 1\}$

④ $\sqrt[3]{س^5} - \sqrt[6]{س^5} = 6$

الحل

$س^{\frac{5}{3}} - س^{\frac{5}{6}} - 6 = .$

$(س^{\frac{5}{6}} - 3)(س^{\frac{5}{6}} + 2) = .$

$س^{\frac{5}{6}} = 3 \Rightarrow س = 3^{\frac{6}{5}} \Rightarrow س = \sqrt[5]{3^6}$

$س^{\frac{5}{6}} = -2$ مرفوض

∴ م.ح = $\{\sqrt[5]{729}\}$

تدريب ٥ اختر الإجابة الصحيحة

① إذا كانت: $س^{\frac{3}{2}} = 64$ فإن س = ......

(أ) ٥١٢ (ب) ١٦ (جـ) ٤ (د) ٢

② مجموعة حل المعادلة $(س-3)^{\frac{5}{3}} = 32$ في ح هي ......

(أ) $\{3\}$ (ب) $\{-11 ، 11\}$ (جـ) $\{11\}$ (د) $\{2\}$

③ مجموعة حل المعادلة: $\sqrt{س^3} = 8$ في ح هي ......

(أ) $\{2\}$ (ب) $\{4\}$ (جـ) $\{16\}$ (د) $\{64\}$

④ مجموعة حل المعادلة: $س^{\frac{2}{3}} = 25$ في ح هي ......

(أ) $\{5\}$ (ب) $\{125\}$ (جـ) $\{5 ، -5\}$ (د) $\{125 ، -125\}$

⑤ مجموعة حل المعادلة $\sqrt[3]{(س-1)^5} = 32$ في ح ......

(أ) $\{3\}$ (ب) $\{-3\}$ (جـ) $\{-9\}$ (د) $\{9\}$

⑥ مجموعة حل المعادلة: $س + 15 = 8\sqrt{س}$ في ح هي ......

(أ) $\{9 ، 25\}$ (ب) $\{-9 ، 25\}$ (جـ) $\{9 ، -25\}$ (د) $\{-9 ، -25\}$

⑦ مجموعة حل المعادلة $س - 3 س^{\frac{1}{2}} + 2 = .$ في ح هي ......

(أ) $\{-1 ، -4\}$ (ب) $\{-1 ، 4\}$ (جـ) $\{1 ، -4\}$ (د) $\{1 ، 4\}$

③ إذا كان $أ^{م} = أ^{ن}$ فإن: $م = ن$ حيث م ، ن ∈ ص ، أ ، ب ∈ ح - {-١ ، ٠ ، ١}

إذا كان $أ^{ن} = ب^{ن}$ وكان:

① ن عدداً فردياً فإن: $أ = ب$

② ن عدداً زوجياً فإن: $أ = \pm ب$

③ $أ \neq \pm ب$ فإن: $ن = صفر$

---

**تدريب ١** أوجد مجموعة الحل في ح

① $5^{2س-1} = \frac{1}{125}$

$5^{2س-1} = 5^{-3}$

$2س - 1 = -3$

$2س = -2 \Leftarrow س = -1$

∴ م.ح = {-١}

② $(\frac{3}{5})^{2س-1} = \frac{27}{125}$

$(\frac{3}{5})^{2س-1} = (\frac{3}{5})^{3}$

$2س - 1 = 3$

$2س = 4 \Leftarrow س = 2 \Leftarrow$ م.ح = {٢}

③ $(\sqrt{3})^{س^2-5س} = 1$

$(\sqrt{3})^{س^2-5س} = (\sqrt{3})^{0}$

$س^2 - 5س = 0$

$س(س - 5) = 0$

م.ح = {٠ ، ٥}

④ $3^{س^2-42} = (\frac{1}{3})^{س}$

$3^{س^2-42} = 3^{-س}$

$س^2 - 42 = -س$

$س^2 + س - 42 = 0$

$(س + 7)(س - 6) = 0$

م.ح = {-٧ ، ٦}

⑤ $2 \times 4^{س+3} = \frac{1}{32}$

$4^{س+3} = \frac{1}{32} \div 2$

$4^{س+3} = \frac{1}{64}$

$4^{س+3} = 4^{-3}$

$س + 3 = -3$

∴ $س = -6$

م.ح = {-٦}

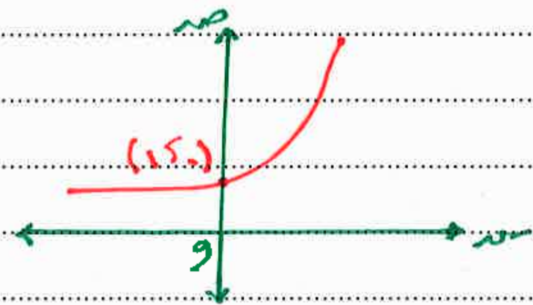
# الدالة الأسية

**تعريف**: إذا كان: $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$

فإن: الدالة $د: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ حيث $د(س) = a^س$ تسمى دالة أسية

## التمثيل البياني للدالة الأسية

$a > 1$ | $0 < a < 1$







## خواص الدالة الأسية $د: د(س) = a^س$

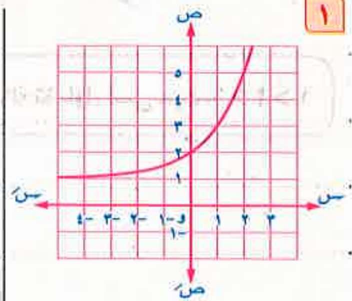
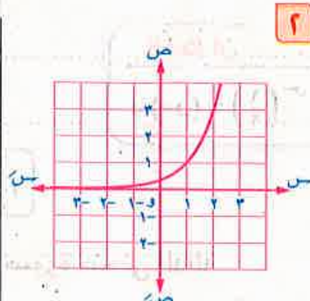
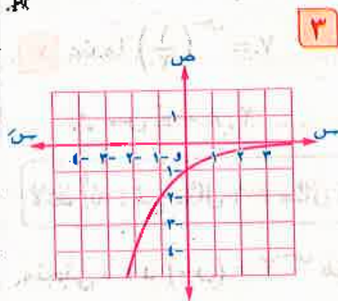
1. المجال: $\mathbb{R}$
2. المدى: $\mathbb{R}^+$ ويقع منحناها فوق محور السينات
3. الدالة تزايدية على مجالها إذا كان $a > 1$ وتسمى دالة نمو أسي معاملها $a$
4. الدالة تناقصية على مجالها إذا كان $0 < a < 1$ وتسمى دالة تضاؤل أسي معاملها $a$
5. منحنى الدالة الأسية يمر بالنقطة (٠، ١)
6. الدالة $د(س) = a^س$ هي دالة أحادية
7. منحنى الدالة: $د(س) = a^س$ صورته منحنى الدالة $د(س) = \left(\frac{1}{a}\right)^س$ بالانعكاس على محور الصادات



**تدريب 1** ارسم منحنى الدوال التالية:

(1) $د(س) = ٢^{س} + ١$ (2) $د(س) = ٣^{س-١}$ (3) $د(س) = -(\frac{١}{٢})^{س}$

**الحل**

(1) المجال: ح ، المدى: ]١ ، ∞[ ، الاطراد: تزايدية على مجالها

(2) المجال: ح ، المدى: ]٠ ، ∞[ ، الاطراد: تزايدية على مجالها

(3) المجال: ح ، المدى: ]-∞ ، ٠[ ، الاطراد: تزايدية على مجالها

**تدريب 2** إذا كانت $د(س) = ٣^{س}$ أوجد قيمة س التي تحقق: $د(س+١) + د(س-١) = ٩٠$

**الحل**

$٣^{س+١} + ٣^{س-١} = ٩٠$

$٣^{س} × ٣ + ٣^{س} × \frac{١}{٣} = ٩٠$

$٣^{س}(٣ + \frac{١}{٣}) = ٩٠$

$٣^{س} × \frac{١٠}{٣} = ٩٠$

$∴ ٣^{س} = ٢٧$

$٣^{س} = ٣^{٣}$

$∴ س = ٣$

**تدريب 3** إذا كانت $د(س) = ٥^{س}$ أوجد قيمة س التي تحقق: $د(٢س) + ٢٥ = ٢٦ د(س)$

**الحل**

$٥^{٢س} + ٢٥ = ٢٦ × ٥^{س}$

$٥^{٢س} - ٢٦ × ٥^{س} + ٢٥ = ٠$

$(٥^{س} - ٢٥)(٥^{س} - ١) = ٠$

$٥^{س} = ٥^{٢} ⇐ س = ٢$

$٥^{س} = ٥^{٠} ⇐ س = ٠$

## تدريب ٤ اختر الإجابة الصحيحة

(١) إذا كانت د(س) = ٢^س فإن : د(-س) =

(أ) -٢^س (ب) $(\frac{١}{٢})^{س}$ (جـ) ٢^(س+١) (د) $(\frac{١}{٢})^{-س}$

(٢) إذا كانت د(س) = ٣^س فإن: د(أ) × د(ب) =

(أ) د(أ+ب) (ب) أب (جـ) د(أب) (د) أ+ب

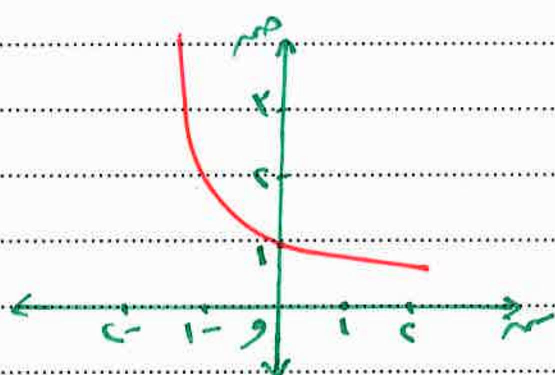
(٣) إذا كان : د(س+١) = ٢^س وكان: د(أ) = ٨ فإن أ =

(أ) ٣ (ب) ٢ (جـ) ٤ (د) ٥

(٤) منحنى الدالة د(س) = ٣^(-س) + ٤ يقطع محور الصادات في النقطة

(أ) (٠، ٥) (ب) (٠، ٥) (جـ) (٠، ٦) (د) (٠، ٦)

(٥) الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د حيث




(أ) د(س) = ٢^(س+١)

(ب) د(س) = ٢^(-س)

(جـ) د(س) = ٢^س

(د) د(س) = ٢^(س-١)

(٦) الدالة الأسية د حيث د(س) = أ^س ، أ > ١ يقترب خطها البياني من

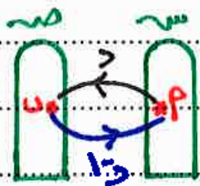
(أ) محور السينات ( للإتجاه الموجب )

(ب) محور السينات ( للإتجاه السالب )

(جـ) محور الصادات ( للإتجاه الموجب )

(د) محور الصادات ( للإتجاه السالب )

# الدالة العكسية



إذا كانت د دالة أحادية مجالها س ومداها ص فإنه كل عنصر ص في المدى يناظره عنصر وحيد س في المجال ولذلك يمكن تعيين دالة عكسية من ص إلى س ويرمزلها بالرمز $د^{-1}$

* لكل (أ ، ب) ∈ بيان د

فإن (ب ، أ) ∈ بيان $د^{-1}$

## خواص الدالة العكسية

① الدالة د والدالة العكسية $د^{-1}$ متماثلان بالنسبة للمستقيم ص = س

② مجال الدالة د = مدى الدالة العكسية $د^{-1}$

③ مدى الدالة د = مجال الدالة العكسية $د^{-1}$

④ يقال إن د ، ر كل منهما دالة عكسية للأخرى إذا كان

(د ∘ ر)(س) = س ، (ر ∘ د)(س) = س

---

تدريب ١: إذا كانت د دالة بيانها هو : د = {(١ ، ٢) ، (٢ ، ٤) ، (٣ ، ٦) ، (٤ ، ٨)}

أوجد بيان الدالة العكسية للدالة د

**الحل**

بيان $د^{-1}$ = {(٢ ، ١) ، (٤ ، ٢) ، (٦ ، ٣) ، (٨ ، ٤)}

---

تدريب ٢: أوجد الدالة العكسية للدالة د حيث د(س) = ٣س − ٢

**الحل**

ص = ٣س − ٢ بتبديل ص برلا من س

س = ٣ص − ٢

٣ص = س + ٢ ⟸ ∴ ص = $\frac{1}{3}$(س + ٢) ⟸ ∴ $د^{-1}$(س) = $\frac{1}{3}$(س + ٢)

تدريب ٣ إذا كانت د حيث $د(س) = \frac{١}{س - ٢} + ٣$ أوجد :

① مجال ومدى د ② $د^{-١}(س)$ وبين مجال ومدى $د^{-١}$

**الحل**

① مجال د = ح − {٢} مدى د = ح − {٣}

② ∵ $ص = \frac{١}{س - ٢} + ٣$ ⟸ ∴ $س = \frac{١}{ص - ٢} + ٣$

∴ $\frac{١}{ص - ٢} = س - ٣$ ⟸ $د^{-١}(س) = \frac{١}{س - ٣} + ٢$

مجال $د^{-١}(س)$ = ح − {٣} مدى $د^{-١}(س)$ = ح − {٢}

---

تدريب ٤ إذا كانت د دالة حيث $د(س) = ٢ + \sqrt{س - ٣}$ أوجد :

① مجال ومدى د ② $د^{-١}(س)$ وبين مجالها ومداها

**الحل**

① ∵ س − ٣ ≤ ٠ ⟸ س ≤ ٣

∴ مجال د = [٣ ، ∞[

لإيجاد المدى : $\sqrt{س - ٣} \leq ٠$ بإضافة ٢

∴ $٢ + \sqrt{س - ٣} \leq ٢$

∴ د(س) ≤ ٢

∴ المدى : [٢ ، ∞[

② $ص = ٢ + \sqrt{س - ٣}$ بالتبديل

$س = ٢ + \sqrt{ص - ٣}$

$س - ٢ = \sqrt{ص - ٣}$ بالتربيع

$(س - ٢)^٢ = ص - ٣$

∴ $ص = (س - ٢)^٢ + ٣$

∴ $د^{-١}(س) = (س - ٢)^٢ + ٣$

مجال $د^{-١}(س)$ = مدى د = [٢ ، ∞[

مدى $د^{-١}(س)$ = مجال د = [٣ ، ∞[

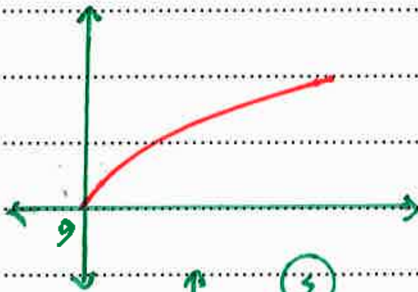
## تدريب ٥

## اختر الإجابة الصحيحة :-

١) إذا كانت د دالة حيث د(س) = ٧س فإن : $د^{-1}$(س) =

(أ) ٧س (ب) $\frac{س}{٧}$ (ج) $\frac{٧}{س}$ (د) −٧س

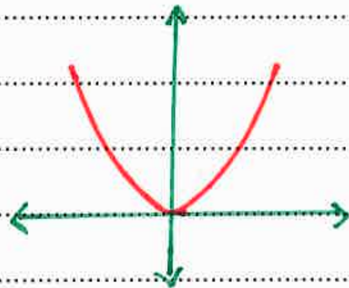
٢) إذا كان التمثيل البياني للدالة د هو
حيث د(س) = $\sqrt{س}$ ، س ≥ ٠
فإن الشكل البياني للدالة $د^{-1}$ هو الشكل ...







٣) الشكل المقابل يبين التمثيل البياني للدالة د
حيث د(س) = $س^2$ ، س ∈ ح
فإن : $د^{-1}$(س) =



(أ) = $\sqrt{س}$ (ب) = $-\sqrt{س}$
(ج) = $\pm\sqrt{س}$ (د) غير موجودة

٤) إذا كانت : $٣^{د(س)}$ = ٢س − ١ فإن : $د^{-1}$(٠) =

(أ) ١ (ب) −١ (ج) ٢ (د) ٥

# الدالة اللوغاريتمية

ص = لو$_{P}$ س ⟺ س = P$^{ص}$ حيث P ∈ ح$^{+}$ - {١} ، س ∈ ح$^{+}$ ، ص ∈ ح

تدريب ١

| عبر عما يأتي بصورة أسية | | عبر عما يأتي بصورة لوغاريتمية | |
|---|---|---|---|
| ١) لو$_{٧}$ ٤٩ = ٢ | ٤٩ = ٧$^{٢}$ | ١) ٢$^{٦}$ = ٦٤ ← | لو$_{٢}$ ٦٤ = ٦ |
| ٢) لو$_{٣}$ $\frac{١}{٢٧}$ = -٣ | $\frac{١}{٢٧}$ = ٣$^{-٣}$ | ٢) ٥$^{-٣}$ = $\frac{١}{١٢٥}$ ← | لو$_{٥}$ $\frac{١}{١٢٥}$ = -٣ |
| ٣) لو$_{ب}$ P = حـ | P = ب$^{حـ}$ | ٣) ٧$^{صفر}$ = ١ ← | لو$_{٧}$ ١ = صفر |

لو (الأساس) (العدد) = (الأس)

- العدد ← ح$^{+}$
- الأساس ← ح$^{+}$ - {١}
- الأس ← ح

## الدالة اللوغاريتمية

إذا كان : P ∈ ح$^{+}$ - {١} فإن : الدالة د : ح$^{+}$ ⟵ ح حيث د(س) = لو$_{P}$ س تسمى دالة لوغاريتمية

## خواص الدالة اللوغاريتمية د : د(س) = لو$_{P}$ س

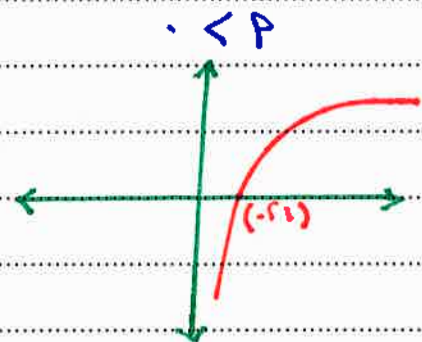
1. مجال الدالة اللوغاريتمية = ح$^{+}$
2. مدى الدالة اللوغاريتمية = ح
3. إذا كانت P > ١ تكون تزايدية وإذا كانت ، > P > ١ تكون تناقصية
4. جميع منحنيات الدوال اللوغاريتمية لأى أساس موجب ≠ ١ تمر بالنقطة (١ ، ٠)
5. الدوال اللوغاريتمية هى دالة أحادية أى إذا كان : لو$_{P}$ س = لو$_{P}$ ص فإن س = ص

⑥ الدالة اللوغاريتمية هي الدالة العكسية للدالة الأسية

$0 < a < 1$




$a > 0$




* لإيجاد مجال الدالة اللوغاريتمية

① نضع العدد > ٠ ② نضع الأساس > ٠ ③ نضع الأساس ≠ ١

تدريب ٢ عين مجال الدوال التالية :-

① د(س) = لو٤ (س − ٣) ② د(س) = لو٤ (٤ − س)

③ د(س) = لو(س−١) ٧ ④ د(س) = لو(س−٣) س

الحل

① بوضع س − ٣ > ٠
س > ٣
∴ المجال = ]٣ ، ∞[

② بوضع ٤ − س > ٠
٤ > س
∴ المجال ]−∞ ، ٤[

③ س − ١ > ٠ ⟸ س > ١
س − ١ ≠ ١ ⟸ س ≠ ٢
∴ المجال : ]١ ، ∞[ − {٢}

④ س > ٠ ⟸ ]٠ ، ∞[
س − ٣ > ٠ ⟸ ]٣ ، ∞[
س − ٣ ≠ ١ ⟸ س ≠ ٤
∴ المجال = ]٣ ، ∞[ − {٤}

الرياضيات : فهم .. إبتكار .. تطبيق

## خواص اللوغاريتمات

إذا كانت $ا \in ح^+ - \{1\}$ ، س ، ص $\in ح^+$

① $لو_ا (س ص) = لو_ا س + لو_ا ص$

② $لو_ا \frac{س}{ص} = لو_ا س - لو_ا ص$

③ $لو_ا س^ن = ن \, لو_ا س$

④ $لو_ا ا = 1$

⑤ $لو_ص س = \frac{لو_ا س}{لو_ا ص}$

⑥ $لو_ص س = \frac{1}{لو_س ص}$

⑦ إذا كان $ص = ا^{لو_ا س}$ فإن ص = س

⑧ $لو_ا 1 = صفر$

**ملحوظة**: اللوغاريتم المعتاد هو لوغاريتم أساسه ١٠ ويكتب (Log) الآله

**تدريب ٣**: بدون استخدام الحاسبة أوجد قيمة :-

① $لو_2 15 + لو_2 14 - لو_2 105$

المقدار $= لو_2 \frac{15 \times 14}{105} = لو_2 2 = 1$

② $لو 0.009 - لو \frac{27}{16} + لو \frac{125}{8} - لو \frac{1}{12}$

المقدار $= لو 0.009 - لو \frac{27}{16} + لو \frac{125}{8} - لو \frac{1}{12}$

$= لو \frac{0.009 \times 16 \times 125 \times 12}{1 \times 8 \times 27}$

$= لو 1$

$=$ صفر

③ $\frac{1}{لو_2 12} + \frac{1}{لو_8 12} + \frac{1}{لو_9 12}$

المقدار $= لو_{12} 2 + لو_{12} 8 + لو_{12} 9$

$= لو_{12} 2 \times 8 \times 9 = لو_{12} 144 = 2$

④ $لو_{ابح} ا + لو_{ابح} ب + لو_{ابح} ح$

المقدار $= لو_{ابح} ابح$

$= 1$

منفعة الرياضيات في فهمها ....

## حل المعادلة اللوغاريتمية

**تدريب ٤** : أوجد مجموعة الحل في ح

**١)** $\text{لو}_{٢}\ \text{س} = ٧$

$\text{س} = ٢^{٧} = ١٢٨$

$\therefore$ م.ح = {١٢٨}

**٢)** $\text{لو}_{٣}\ (٢\text{س} - ٥) = ٠$

$٢\text{س} - ٥ = ٣^{٠}$

$٢\text{س} = ٦ \Leftarrow \text{س} = ٣$

م.ح = {٣}

**٣)** $\text{لو}_{\text{س}}\ (٢\text{س} + ٨) = ٢$

$\text{س}^{٢} = ٢\text{س} + ٨$

$\text{س}^{٢} - ٢\text{س} - ٨ = ٠$

$\text{س} = ٤$ ، $\text{س} = -٢$ مرفوض

$\therefore$ م.ح = {٤}

**٤)** $\text{لو}_{٢}\ (\text{لو}_{٣}\ \text{س}) = ١$

$\text{لو}_{٣}\ \text{س} = ٢^{١} = ٢$

$\text{س} = ٣^{٢} = ٩$

م.ح = {٩}

**٥)** $\text{لو}_{\text{س}-١}\ ٢٧ = ٣$

$(\text{س} - ١)^{٣} = ٢٧$

$\text{س} - ١ = ٣ \Leftarrow \text{س} = ٤$

$\therefore$ م.ح = {٤}

**٦)** $\text{لو}_{٢}\ \text{س} + \text{لو}_{٢}\ (\text{س} + ٢) = ٣$

$\text{لو}_{٢}\ \text{س}(\text{س} + ٢) = ٣$

$\text{س}^{٢} + ٢\text{س} = ٢^{٣}$

$\text{س}^{٢} + ٢\text{س} - ٨ = ٠$

$\text{س} = ٢$ ، $\text{س} = -٤$ مرفوض

م.ح = {٢}

**٧)** $\text{لو}_{٣}\ (\text{س} - ١) + \text{لو}_{٣}\ (\text{س} + ١) = \text{لو}_{٣}\ ٨$

$\text{لو}_{٣}\ (\text{س} - ١)(\text{س} + ١) = \text{لو}_{٣}\ ٨$

$\text{س}^{٢} - ١ = ٨$

$\text{س}^{٢} = ٩ \Leftarrow \text{س} = ٣$ ، $\text{س} = -٣$ مرفوض

م.ح = {٣}

**٨)** $(\text{لو}\ \text{س})^{٢} - \text{لو}\ \text{س}^{٢} = ٣$

$(\text{لو}\ \text{س})^{٢} - ٢\ \text{لو}\ \text{س} - ٣ = ٠$ مقدار ثلاثي

$(\text{لو}\ س - ٣)(\text{لو}\ س + ١) = ٠$

$\text{لو}\ س = ٣$ ، $\text{لو}\ س = -١$

$س = ١٠^{٣}$ ، $س = ١٠^{-١}$

$\text{م.ح} = \{١٠٠٠ ، \frac{١}{١٠}\}$

---

(٩) $\text{لو}_{٣}\ س + \text{لو}_{س}\ ٣ = ٢$

$\therefore \text{لو}_{٣}\ س + \frac{١}{\text{لو}_{٣}\ س} = ٢ \quad \times \text{لو}_{٣}\ س$

$(\text{لو}_{٣}\ س)^{٢} + ١ = ٢\ \text{لو}_{٣}\ س$

$(\text{لو}_{٣}\ س)^{٢} - ٢\ \text{لو}_{٣}\ س + ١ = ٠$

$(\text{لو}_{٣}\ س - ١)^{٢} = ٠$

$\text{لو}_{٣}\ س = ١ \Leftarrow س = ٣^{١} = ٣$

---

(١٠) $\text{لو}_{٤}\ س = ١ - \text{لو}_{٤}(س - ٣)$

$\text{لو}_{٤}\ س + \text{لو}_{٤}(س - ٣) = ١$

$\text{لو}_{٤}\ س(س - ٣) = ١$

$س^{٢} - ٣س = ٤$

$س^{٢} - ٣س - ٤ = ٠$

$س = ٤$ ، $س = -١$ مرفوض

$\text{م.ح} = \{٤\}$

---

تدريب (٥) إذا كان: $٢^{س+١} = ٥$ أوجد قيمة س لأقرب رقمين عشريين

بأخذ لو للطرفين

$\text{لو}\ ٢^{س+١} = \text{لو}\ ٥$

$(س+١)\ \text{لو}\ ٢ = \text{لو}\ ٥$

$س\ \text{لو}\ ٢ + \text{لو}\ ٢ = \text{لو}\ ٥$

$س\ \text{لو}\ ٢ = \text{لو}\ ٥ - \text{لو}\ ٢$

$س = \frac{\text{لو}\ ٥ - \text{لو}\ ٢}{\text{لو}\ ٢} \simeq ١,٣٢$

---

تدريب (٦) إذا كان: $٧^{س+١} = ٣^{س-٢}$ أوجد قيمة س لأقرب رقمين عشريين

$\text{لو}\ ٧^{س+١} = \text{لو}\ ٣^{س-٢}$

$(س+١)\ \text{لو}\ ٧ = (س-٢)\ \text{لو}\ ٣$

$س\ \text{لو}\ ٧ + \text{لو}\ ٧ = س\ \text{لو}\ ٣ - ٢\ \text{لو}\ ٣$

$س\ \text{لو}\ ٧ - س\ \text{لو}\ ٣ = -٢\ \text{لو}\ ٣ - \text{لو}\ ٧$

$س\ (\text{لو}\ ٧ - \text{لو}\ ٣) = -٢\ \text{لو}\ ٣ - \text{لو}\ ٧$

$\therefore س = \frac{-٢\ \text{لو}\ ٣ - \text{لو}\ ٧}{\text{لو}\ ٧ - \text{لو}\ ٣} \simeq -٤,٨٩$

**تدريب ٧** إذا كان س ص = ١٦ إثبت أن: $٣ لو_{٢} س + ٤ لو_{٢} ص - لو_{٢} س ص = ٨$

ط.أ = $لو_{٢} س^{٣} + لو_{٢} ص^{٤} - لو_{٢} س ص$

= $لو_{٢} \frac{س^{٣} ص^{٤}}{س ص}$

= $لو_{٢} س^{٢} ص^{٢} = لو_{٢} (س ص)^{٢}$

= $لو_{٢} (١٦)^{٢} = لو_{٢} ٢^{٨} = ٨$

**تدريب ٨** حل المعادلة: $لو_{٩} لو_{٢} لو_{س} ٢٧ = صفر$

∵ $لو_{٩} [لو_{٢} لو_{س} ٢٧] = ٠$

$لو_{٢} لو_{س} ٢٧ = ٩^{٠} = ١$

∴ $لو_{٢} [لو_{س} ٢٧] = ١$

$لو_{س} ٢٧ = ٣$

$س^{٣} = ٢٧ \Leftarrow س = ٣$

**تدريب ٩** إختر الإجابة الصحيحة

١) إذا كانت $لو_{٥} س = ٣$ فإن قيمة $لو_{٥} (\frac{س}{٥}) = ....$

(أ) ٢ (ب) ١٢٥ (ج) ٣ (د) ٢٥

٢) إذا كان: $لو_{س} ٢٥ = ٢$ فإن $س^{٣} + س^{٢} = ....$

(أ) ١٠٥ (ب) ١٤٥ (ج) ٩٥ (د) ١٥٥

٣) قيمة $٣^{لو_{٣} ٥} = ....$

(أ) ١٥ (ب) ٥ (ج) ١ (د) ٣

٤) مجموعة حل المعادلة $لو_{س} ٨١ = ٤$ هي .... حيث $س \in ح^{+} - \{١\}$

(أ) {٣، −٣} (ب) {٩، −٩} (ج) {٣} (د) $\{\frac{٨١}{٤}\}$

٥) إذا كانت $لو_{س} ٣ = ص - ١$ فإن ....

(أ) $٢ س^{ص}$ (ب) $ص = \frac{١}{٣} س^{ص}$ (ج) $س = ٣ ص^{س}$ (د) $س = \frac{١}{٣} ص^{س}$

٦) الدالة العكسية للدالة $د(س) = لو_{٢}(س)$ هي $د^{-١}(س) = ....$

(أ) $س^{٢}$ (ب) $٢^{س}$ (ج) $(\frac{١}{٢})^{س}$ (د) $٢^{س} + ٢$

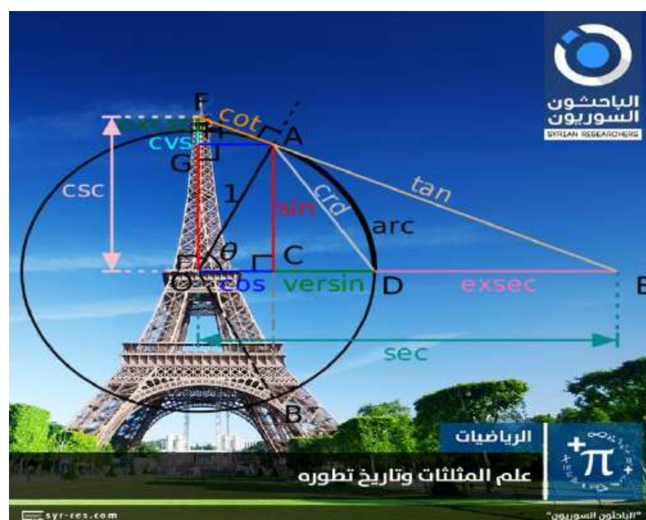
اللهم إن كان توفيقاً فمن الله
وإن كان خطأ أو نسيان فمني
ومن الشيطان

# ثانياً :

# حساب المثلثات

## (١) قانون الجيب

## (٢) قانون جيب التمام





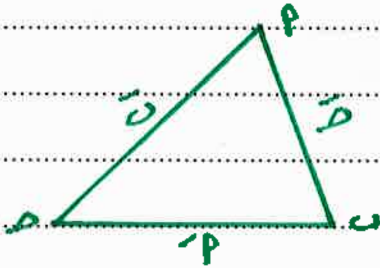
دايما فى العلالى

٠١٢٢٨٤٨٤٥٦٧

٠١١١١٩٥٤٨٠٠

# قانون الجيب

في أي مثلث تتناسب أطوال أضلاع المثلث مع جيوب الزوايا المقابلة لها




في △ أ ب جـ يكون:

$$\frac{أً}{جا أ} = \frac{بً}{جا ب} = \frac{جـً}{جا جـ}$$

**تمرين مشهور**

$$\frac{أً}{جا أ} = \frac{بً}{جا ب} = \frac{جـً}{جا جـ} = ٢ نق$$

حيث نق طول نصف قطر الدائرة الخارجة للمثلث أ ب جـ

**ملاحظات**

(١) محيط △ أ ب جـ = أً + بً + جـً

(٢) مساحة △ أ ب جـ = $\frac{1}{2}$ أً بً جا جـ = $\frac{1}{2}$ بً جـً جا أ = $\frac{1}{2}$ أً جـً جا ب

(٣) محيط الدائرة = ٢ π نق ، مساحة الدائرة = π نق²

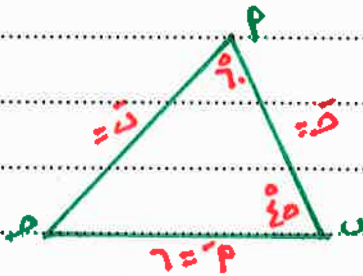
(٤) طول الضلع الأكبر يقابل قياس الزاوية الأكبر و العكس

---

**تدريب ١**

أ ب جـ △ فيه ق(∠أ) = ٦٠° ، ق(∠ب) = ٤٥° ، أً = ٦ سم أوجد محيط △ أ ب جـ لأقرب سم.

**الحل**




ق(∠جـ) = ١٨٠° − ١٠٥° = ٧٥°

$$\frac{٦}{جا ٦٠°} = \frac{بً}{جا ٤٥°} = \frac{جـً}{جا ٧٥°}$$

بً = $\frac{٦ \times جا ٤٥°}{جا ٦٠°}$ ≃ ٤٫٩ سم ، جـً = $\frac{٦ \times جا ٧٥°}{جا ٦٠°}$ ≃ ٦٫٧ سم

∴ محيط △ أ ب جـ = ٦ + ٤٫٩ + ٦٫٧ = ١٧٫٦ ≃ ١٨ سم

---

**تدريب ٢**

△ أ ب جـ فيه جـً = ٦٫٧ سم ، ق(∠أ) = ٨٠° ، ق(∠ب) = ٤٧° أوجد طول نصف قطر الدائرة الخارجة للمثلث أ ب جـ

$ق(\hat{ح}) = 180° - 127° = 53°$

$\therefore \frac{ح}{جا ح} = 2نق \Leftarrow \frac{6,7}{جا 53°} = 2نق \Leftarrow نق \simeq 4,76$ سم

**تدريب ٣**

Δ ل م ن فيه: $ق(\hat{ل}) = 60°$ ، $ق(\hat{م}) = 45°$ وطول نصف قطر الدائرة المارة برؤوسه ٢٠ سم أوجد مساحة Δ ل م ن

**الحل**

$ق(\hat{ن}) = 180° - 105° = 75°$

$\frac{ل}{جا 60°} = \frac{م}{جا 45°} = \frac{ن}{جا 75°} = 2 \times 20$

$\therefore ل = 40 جا 60° \simeq 34,6$ سم

$م = 40 جا 45° \simeq 28,3$ سم

$\therefore$ مساحة Δ $= \frac{1}{2} ل م جا ن$

$= \frac{1}{2} \times 34,6 \times 28,3$ جا $75°$

$= 472,9$ سم$^2$

**تدريب ٤**

إذا كان محيط Δ م ن ص يساوي ٢٤ سم ، $ق(\hat{ن}) = 30°$ ، $ق(\hat{ص}) = 48°$ أوجد ن

**الحل**

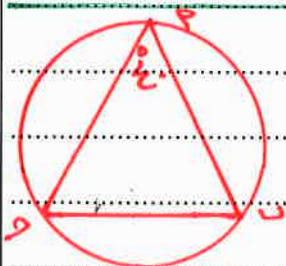
$\therefore \frac{م}{جا 102°} = \frac{ن}{جا 30°} = \frac{ص}{جا 48°}$

$\therefore \frac{م + ن + ص}{جا 102° + جا 30° + جا 48°} = \frac{ن}{جا 30°}$

$\therefore \frac{24}{2,22} = \frac{ن}{جا 30°}$

$\therefore ن \simeq 5,4$ سم

**تدريب ٥**




في الشكل المقابل ... دائرة طول نصف قطرها ٥ سم مرسومة برؤوس Δ م ن ص ، $ق(\hat{م}) = 40°$ فإن طول $\overline{ن ص}$ = ...

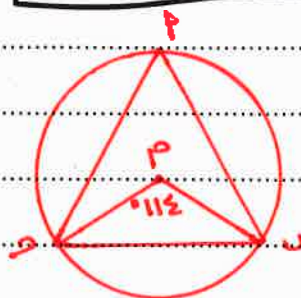
(أ) ١٠ جا ٤٠° (ب) ٥ جا ٤٠°

(ج) $\frac{10}{جا 40°}$ (د) $\frac{5}{جا 40°}$

**الحل**

$\frac{ن ص}{جا 40°} = 2نق$

ن ص = ١٠ جا ٤٠°



**تدريب ٦**

في الشكل المقابل: △ أ ب جـ مرسوم في الدائرة م التي طول نصف قطرها ٢٠ سم، ق(∠ ب م جـ) = ١١٤°

فيكون: أ = ........ سم لأقرب عدد صحيح.

(أ) ٢٢  (ب) ٢٠

(جـ) ١٩  (د) ١٠

**الحل**

∵ ق(∠ أ) المحيطية = ½ ق(∠ ب م جـ) المركزية المشتركة معها في نفس القوس

∴ ق(∠ أ) = ٥٧°

∵ $\frac{أ}{جا ٥٧°}$ = ٢ نق

∴ أ = ٤٤ جا ٥٧° ≃ ٢٠ سم

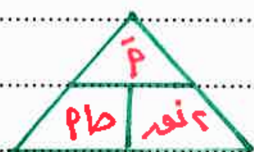
**تدريب ٧**

في △ أ ب جـ إثبت أن مساحة = $\frac{أ ب جـ}{٤ نق}$ حيث نق طول نصف قطر الدائرة الخارجة للمثلث

**الحل**

∵ مساحة △ = ½ ب جـ جا أ

= ½ ب جـ × $\frac{أ}{٢ نق}$ = $\frac{أ ب جـ}{٤ نق}$




**تدريب ٨**

في △ أ ب جـ إثبت أن: مساحته = ٢ نق² جا أ جا ب جا جـ

**الحل**

∵ مساحة △ = ½ ب جـ جا أ

= ½ × ٢ نق جا ب × ٢ نق جا جـ × جا أ   بالتعويض عن ب = ٢ نق جا ب ، جـ = ٢ نق جا جـ

= ٢ نق² جا أ جا ب جا جـ

**تذكر أن**

△ أ ب جـ فيه ق(∠ أ) + ق(∠ ب) + ق(∠ جـ) = ١٨٠°

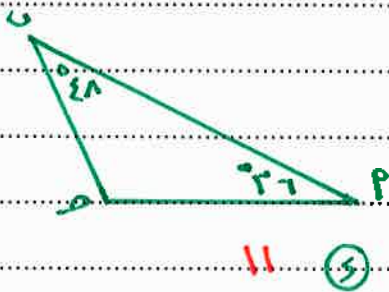
∴ أ + ب = ١٨٠ − جـ

بأخذ جا للطرفين: جا (أ + ب) = جا جـ

بأخذ جتا للطرفين: جتا (أ + ب) = − جتا جـ

ظا الطرفين: ظا (أ + ب) = − ظا جـ

## تدريب ٩ — إختر الإجابة الصحيحة :-




(١) فى الشكل المقابل ...
المثلث أ ب جـ فيه: ق(∠أ) = ٣٦° ، ق(∠ب) = ٤٨°
، أ جـ = ٨ سم فإن ب جـ = ......... سم لأقرب سم

(أ) ٦ (ب) ١٠ (جـ) ١٤ (د) ١١

(٢) فى △ أ ب جـ أى من العبارات التالية صحيحة ؟

(أ) أ جا ب = ب جا أ (ب) أ = ب جا جـ

(جـ) جا أ + جا ب = أ + ب (د) أ / جا أ = جا ب / ب

(٣) إذا كان: نق = طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس △ أ ب جـ فإن: نق جا أ = ....

(أ) ½ أ (ب) ٢ أ (جـ) أ (د) ٤ أ

(٤) إذا كان نق نصف قطر الدائرة الخارجية للمثلث أ ب جـ وكان أ = ½ نق فإن ق(∠أ) = ....

(أ) جا⁻¹ (١) (ب) جا⁻¹ (٢) (جـ) جا⁻¹ (¼) (د) جا⁻¹ (½)

(٥) فى △ أ ب جـ إذا كان أ جا أ = ب جا ب فإن: ......

(أ) ∠أ منفرجة (ب) أ = ب (جـ) ق(∠أ) = ٩٠° (د) ب = جـ

(٦) إذا كان: أ ب جـ مثلث فيه: جتا (ب + جـ) = ٣/٥ ، ب جـ = ٨ سم فإن
طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس △ أ ب جـ = ......... سم

(أ) ٤ (ب) ٥ (جـ) ٨ (د) ١٠

**الرياضيات : غذاء العقل**



# قانون جيب التمام

في أي مثلث أ ب جـ يكون :

$أ^2 = ب^2 + جـ^2 - 2\, ب\, جـ\, جتا\, أ$

$ب^2 = أ^2 + جـ^2 - 2\, أ\, جـ\, جتا\, ب$

$جـ^2 = أ^2 + ب^2 - 2\, أ\, ب\, جتا\, جـ$

$جتا\, أ = \frac{ب^2 + جـ^2 - أ^2}{2\, ب\, جـ}$

$جتا\, ب = \frac{أ^2 + جـ^2 - ب^2}{2\, أ\, جـ}$

$جتا\, جـ = \frac{أ^2 + ب^2 - جـ^2}{2\, أ\, ب}$

**تدريب ١**

أ ب جـ مثلث فيه: أ = ٥ سم ، ب = ٣ سم ، ق(∠جـ) = ١٢٠° أوجد جـ

**الحل**

∵ $جـ^2 = أ^2 + ب^2 - ٢\, أ\, ب\, جتا\, جـ$

∴ $جـ^2 = ٢٥ + ٩ - ٢ \times ٥ \times ٣\, جتا\, ١٢٠°$ ⟸ جـ = ٧ سم

**تدريب ٢**

أوجد قياس أكبر زاوية في Δ أ ب جـ حيث: أ = ١٢ سم ، ب = ١١ سم ، جـ = ٥ سم

**الحل**

أكبر زاوية هي المقابلة لأكبر ضلع

∴ $جتا\, أ = \frac{ب^2 + جـ^2 - أ^2}{٢\, ب\, جـ}$ ⟸ $جتا\, أ = \frac{١٢١ + ٢٥ - ١٤٤}{٢ \times ١١ \times ٥}$ ⟸ ق(∠أ) = ٨٨° ٥٧َ ٢٩ً

**تدريب ٣**

أ ب جـ Δ فيه: ٤ جا أ = ٣ جا ب = ٦ جا جـ أوجد ق(∠جـ)

**الحل**

∵ ٤ جا أ = ٣ جا ب = ٦ جا جـ ÷ ١٢

∴ $\frac{جا\, أ}{٣} = \frac{جا\, ب}{٤} = \frac{جا\, جـ}{٢}$

∴ أ : ب : جـ = ٣ : ٤ : ٢

نفرض: أ = ٣ ل ، ب = ٤ ل ، جـ = ٢ ل

$جتا\, جـ = \frac{٩ل^2 + ١٦ل^2 - ٤ل^2}{٢ \times ٣ل \times ٤ل} = \frac{٢١ل^2}{٢٤ل^2}$

∴ ق(∠جـ) = ٢٨° ٥٧َ

**تدريب ٤** أ ب جـ Δ مساحته = $٥\sqrt{٣}$ سم² وفيه: أ = ٤ سم ، ق(جـ) = ٦٠° أوجد جـ

**الحل**

∵ م(Δ أ ب جـ) = ½ أ ب جا جـ

∴ $٥\sqrt{٣}$ = ½ × ٤ × ب جا ٦٠°

$٥\sqrt{٣}$ = ٢ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ب

∴ ب = ٥ سم

∵ جـ² = أ² + ب² − ٢ أ ب جتا جـ

= ١٦ + ٢٥ − ٢ × ٤ × ٥ جتا ٦٠°

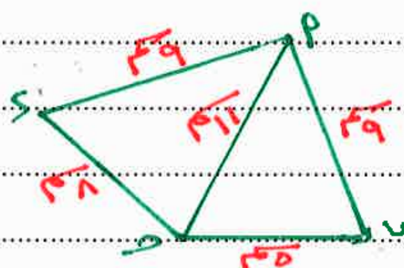
∴ جـ = ٤٫٦ سم

---

**تدريب ٥** في الشكل المقابل...

أ ب جـ د شكل رباعي فيه: أ ب = ٩ سم ، ب جـ = ٥ سم ، جـ د = ٨ سم ، أ د = ٩ سم

إثبت أن الشكل أ ب جـ د رباعي دائري.




**الحل**

في Δ أ ب جـ

جتا ب = $\frac{(٩)^٢ + (٥)^٢ - (١١)^٢}{٢ × ٩ × ٥}$ = − $\frac{١}{٦}$

في Δ أ جـ د

جتا د = $\frac{(٩)^٢ + (٨)^٢ - (١١)^٢}{٢ × ٩ × ٨}$ = $\frac{١}{٦}$

∵ جتا د = − جتا ب ⟸ ق(د) + ق(ب) = ١٨٠°

⟸ ∴ الشكل أ ب جـ د رباعي دائري

---

**إفتكر معايا** يكون الشكل رباعي دائري إذا كان فيه:

١) زاويتان مرسومتان على قاعدة واحدة وفي جهة واحدة متساويتان

٢) زاويتان متقابلتان متكاملتان.

---

**إفتكر معايا** عند حل المثلث فإننا نوجد جميع عناصر المثلث [٣ زوايا + ٣ أضلاع]

---

**تدريب ٦** أ ب جـ Δ فيه: ب = ٢½ سم ، جـ = ٢ سم ، جتا أ = $\frac{٢}{٥}$ إثبت أن Δ متساوي الساقين

**الحل**

∵ أ² = ب² + جـ² − ٢ ب جـ جتا أ

= ٦٫٢٥ + ٤ − ٢ × ٢٫٥ × ٢ × $\frac{٢}{٥}$

∴ أ = ٢ سم

∵ أ = ب ∴ Δ متساوي الساقين

**تدريب 7**

أ ب جـ Δ فيه: أ$^2$ = (ب − جـ)$^2$ + ب جـ ، إثبت أن: ق(أ̂) = $60^\circ$

**الحل**

∵ أ$^2$ = ب$^2$ + جـ$^2$ − 2 ب جـ + ب جـ  معطى

∴ أ$^2$ = ب$^2$ + جـ$^2$ − ب جـ ← (1)

∵ جتا أ = $\dfrac{\text{ب}^2 + \text{جـ}^2 - \text{أ}^2}{2\,\text{ب جـ}}$ ← (2)

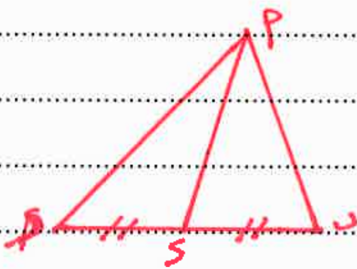
بالتعويض من (1) في (2) ⇐ ∴ جتا أ = $\dfrac{\text{ب}^2 + \text{جـ}^2 - [\text{ب}^2 + \text{جـ}^2 - \text{ب جـ}]}{2\,\text{ب جـ}}$

∴ جتا أ = $\dfrac{\text{ب}^2 + \text{جـ}^2 - \text{ب}^2 - \text{جـ}^2 + \text{ب جـ}}{2\,\text{ب جـ}} = \dfrac{1}{2}$ ⇐ ∴ ق(أ̂) = $60^\circ$

**تدريب 8**

أ ب جـ Δ فيه: د منتصف ب جـ كما بالشكل المقابل.

أثبت أن: (أب)$^2$ + (أجـ)$^2$ = 2(أد)$^2$ + 2(ب د)$^2$




**الحل**

نفرض: ق(أ د̂ ب) = θ  ∴ ق(أ د̂ جـ) = (180 − θ)

في Δ أ ب د

(أب)$^2$ = (أد)$^2$ + (ب د)$^2$ − 2(أد)(ب د) جتا θ ← [1]

في Δ أ جـ د

(أجـ)$^2$ = (أد)$^2$ + (جـ د)$^2$ − 2(أد)(جـ د) جتا(180 − θ)

لاحظ أن: جتا(180 − θ) = − جتا θ

(أجـ)$^2$ = (أد)$^2$ + (جـ د)$^2$ + 2(أد)(جـ د) جتا θ ← [2]

∵ ب د = جـ د

بالجمع [1] + [2] ⇐ ∴ (أب)$^2$ + (أجـ)$^2$ = 2(أد)$^2$ + 2(ب د)$^2$ #

## تدريب ٩ : إختر الإجابة الصحيحة :

(١) △ أ ب حـ فيه : أ = ٥ر٥ سم ، ب = ٥ر٢ سم ، ق(حـ) = ٢٠° فإن : حـ = ...... سم

(أ) ٣ (ب) ٣ر١ (حـ) ٢ر٩ (د) ٣ر٢

(٢) أ ب حـ مثلث فيه : أ ب = ٢٤ سم ، ب حـ = ٢٠ سم ، ق(∠أ ب حـ) = ١١٥°
فإن : مساحة سطح الدائرة المارة برؤوس المثلث أ ب حـ = ...... سم²

(أ) ٣٤٩ $\pi$ (ب) ٤٢١ $\pi$ (حـ) ١٧٠ $\pi$ (د) ٤٩ $\pi$

(٣) في △ أ ب حـ إذا كان : أ : ب : حـ = ٥ : ٦ : ٧ فإن قياس أكبر زواياه =

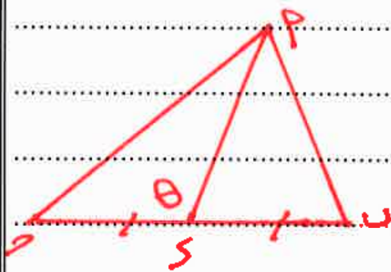
(أ) ١١٢° ١٥′ ٤٥″ (ب) ٧٨° ٢٧′ ٤٧″ (حـ) ١٢٣° ٤٥′ ٣٥″ (د) ١٠٢° ٥٥′ ٣٧″

(٤) إذا كانت أطوال أضلاع المثلث هي : س ، س − ٢ ، س + ٢ وكان قياس
أكبر زواياه ١٢٠° فإن : س = ......

(أ) ٦ سم (ب) ٥ سم (حـ) ٣ سم (د) ٤ سم

(٥) في الشكل المقابل :
(أ ب)² − (أ حـ)² = ......

(أ) ٢(أ د)² + ٢(د ب)²
(ب) ٢(أ د)² + ٢(ب د)² − ٤(أ د)(ب د) جتا $\theta$
(حـ) ٢ أ د × ب حـ جتا $\theta$
(د) ٢(أ د)²



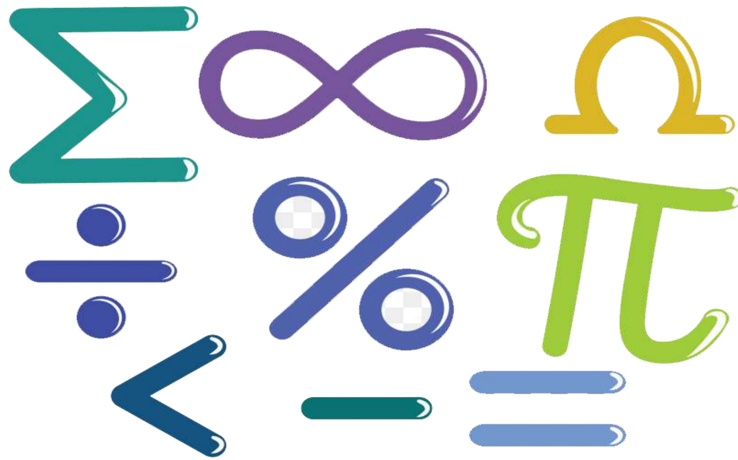

(٦) أ ب حـ △ فيه : (أ + ب + حـ)(أ + ب − حـ) = ٣ أ ب فإن : ق(حـ) = ......

(أ) ٣٠° (ب) ٤٥° (حـ) ٦٠° (د) ١٢٠°

اللهم إن كان توفيقاً فمن الله ... وإن كان خطأً أو نسيان فمني والشيطان

# ثالثاً :

# التفاضل



المعالي

دايما فى العلالى

٠١٢٢٨٤٨٤٥٦٧

٠١١١١٩٥٤٨٠٠

# مقدمة في النهايات

## الرمزان $\infty$ ، $-\infty$

إذا كان $ا \in ح$

$\infty$ يعبر عن كمية أكبر من أى عدد حقيقى موجب يمكن تخيله [ليس عددًا حقيقيًا]

$-\infty$ يعبر عن كمية أصغر من أى عدد حقيقى سالب يمكن تخيله [ليس عددًا حقيقيًا]

(١) $\infty \pm ا = \infty$ (٢) $-\infty \pm ا = -\infty$

(٣) $\infty \times ا = \begin{cases} \infty & \text{عند } ا > ٠ \\ -\infty & \text{عند } ا < ٠ \end{cases}$ (٤) $\infty \div ا = \begin{cases} \infty & \text{عند } ا > ٠ \\ -\infty & ا < ٠ \end{cases}$

## أنواع الكميات

**الكمية المعينة**: هى كمية لها ناتج محدد

مثل: ٣ ، $\frac{١}{٤}$ ، صفر ، ...

**الكمية الغير معينة**: هى كمية ليس لها ناتج محدد

$\frac{صفر}{صفر}$ ، $\frac{\infty}{\infty}$ ، $\infty - \infty$ ، ...

**الكمية الغير معرفة**: هى كمية ليس لها معنى

$\frac{ا}{صفر}$ حيث $ا \in ح - \{٠\}$

---

**تدريب ١**

(١) $٧ + \infty =$ (٢) $\infty + \infty =$ (٣) $٩ \times \infty =$

(٤) $-٤ \times -\infty =$ (٥) $٥ - \infty =$ (٦) $\infty \times$ صفر $=$

---

## نهاية دالة عند نقطة

**مثال توضيحي**

إذا كانت $د(س) = \frac{س^٢ - ٤}{س - ٢}$ واضح أن مجال د $= ح - \{٢\}$ يعنى $د(٢) = \frac{٠}{٠}$ كمية غير معينة يعنى لا يمكن تعيين قيمة للدالة عند $س = ٢$ . لذلك سوف نقوم دراسة إقتراب الدالة من قيمة معينة كلما إقتربت س من العدد ٢

ولدراسة هذا التقارب يوجد طريقتين: جبرية و بيانية

## تقدير النهاية عددياً

دراسة تقارب الدالة د(س) = س + ٢ عندما س تقترب من ١

س تقترب من ١ من اليمين ($س \to ^+١$) — س تقترب من ١ من اليسار ($س \to ^-١$)

| س | ١٫٤ | ١٫٣ | ١٫٢ | ١٫١ | | ٠٫٩ | ٠٫٨ | ٠٫٧ | ٠٫٦ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| د(س) | ٣٫٤ | ٣٫٣ | ٣٫٢ | ٣٫١ | | ٢٫٩ | ٢٫٨ | ٢٫٧ | ٢٫٦ |

د(س) تقترب من ٣ من اليمين ($د(س) \to ٣$) — يسمى العدد ٣ بالنهاية اليمنى للدالة

$$\lim_{س \to ^+١} د(س) = ٣$$

أو: $د(^+١) = ٣$

د(س) تقترب من ٣ من اليسار ($د(س) \to ٣$) — يسمى العدد ٣ بالنهاية اليسرى للدالة

$$\lim_{س \to ^-١} د(س) = ٣$$

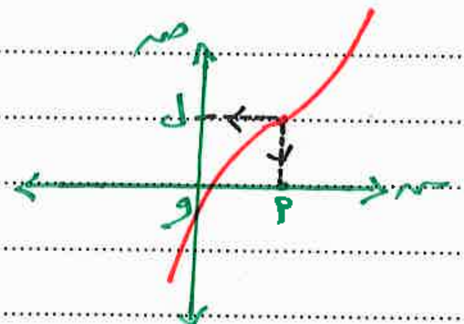
$د(^-١) = ٣$

**تعريف:** إذا كانت قيمة الدالة د تقترب من قيمة وحيدة ل عندما تقترب س من م من اليمين واليسار فإن نهاية الدالة د(س) = ل ونكتب

$$\lim_{س \to م} د(س) = ل$$

أى أن: $د(^+م) = د(^-م) = ل$

## تقدير النهاية بيانياً

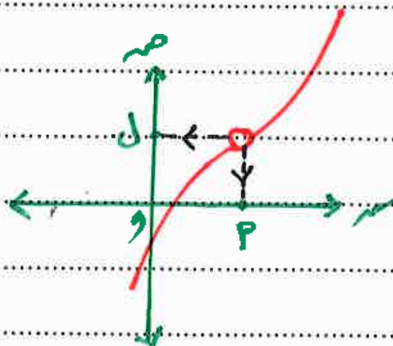



د(م) = ل تعريف الدالة

$د(^+م) = ل$ النهاية اليمنى

$د(^-م) = ل$ النهاية اليسرى

$\lim_{س \to م} د(س) = ل$

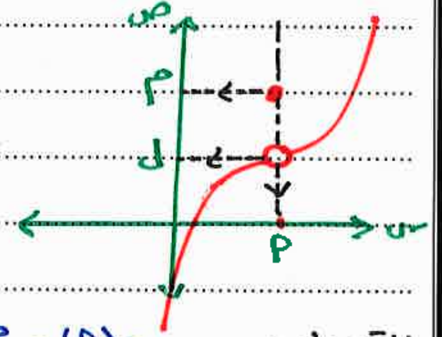


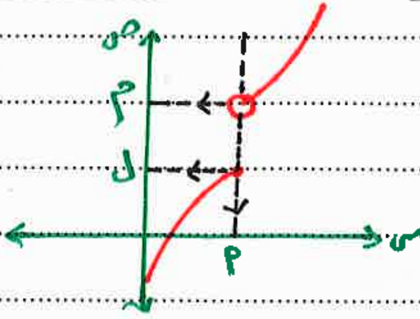

د(م) = غير معرفة

$د(^+م) = ل$

$د(^-م) = ل$

$\lim_{س \to م} د(س) = ل$



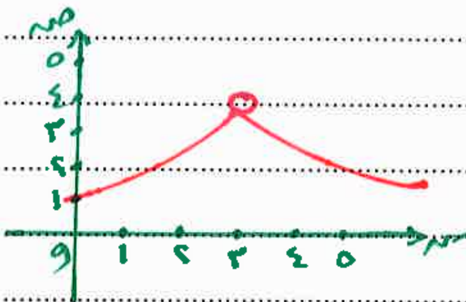




| | | |
|---|---|---|
| التعريف: | د(أ) = م | د(أ) = ل |
| النهاية اليمنى: | $د(أ^+)$ = ل | $د(أ^+)$ = م |
| النهاية اليسرى: | $د(أ^-)$ = ل | $د(أ^-)$ = ل |
| ∴ | $\underset{س \leftarrow أ}{نها}$ د(س) = ل | $\underset{س \leftarrow أ}{نها}$ د(س) غير موجودة |

**ملاحظات:**

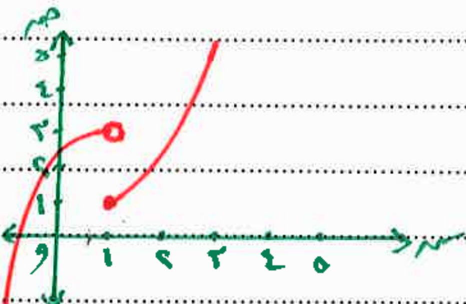
1. عند إيجاد نهاية الدالة ليس من الضروري أن تكون الدالة معرفة عند س = أ
2. يجب أن تكون الدالة معرفة على فترة على يمين أ وفترة أخرى على يسار أ
3. إذا كان $د(أ^+) \neq د(أ^-)$ فإن نهاية الدالة غير موجودة

**تدريب ٢** في الشكل المقابل .. أوجد:




1. د(٣) =
2. $د(٣^+)$ =
3. $د(٣^-)$ =
4. $\underset{س \leftarrow ٣}{نها}$ د(س) =

**تدريب ٣** في الشكل المقابل .. أوجد:




1. د(١) =
2. $د(١^+)$ =
3. $د(١^-)$ =
4. $\underset{س \leftarrow ١}{نها}$ د(س) =

# إيجاد نهاية الدالة جبريًا

**نظرية ١**

إذا كانت : د(س) كثيرة حدود في المتغير س فإن : $\lim_{س \to ا} د(س) = د(ا)$

**نتيجة**

إذا كانت : د(س) = ل حيث ل ثابتة فإن : $\lim_{س \to ا} د(س) = \lim_{س \to ا} ل = ل$

**نظرية ٢**

إذا كانت د ، ر دالتين في المتغير س وكانت : $\lim_{س \to ا} د(س) = ل$ ، $\lim_{س \to ا} ر(س) = م$ حيث ل ، م ∈ ح فإن :

① $\lim_{س \to ا} [د(س) \pm ر(س)] = \lim_{س \to ا} د(س) \pm \lim_{س \to ا} ر(س) = ل \pm م$

② $\lim_{س \to ا} [د(س) \times ر(س)] = \lim_{س \to ا} د(س) \times \lim_{س \to ا} ر(س) = ل \times م$

③ $\lim_{س \to ا} [د(س) \div ر(س)] = \lim_{س \to ا} د(س) \div \lim_{س \to ا} ر(س) = ل \div م$ حيث م ≠ ٠

④ $\lim_{س \to ا} [د(س)]^{ن} = [\lim_{س \to ا} د(س)]^{ن} = ل^{ن}$ حيث ن ∈ ص+

**تدريب ١** أكمل ما يأتي :

① $\lim_{س \to ٢} (٣س - ١)$

② $\lim_{س \to ٢} \frac{س - ١}{س + ١}$

③ $\lim_{س \to ٤} \frac{٣}{٥}$

④ $\lim_{س \to ٠} \frac{جتاس}{٣ + ٢س}$

⑤ $\lim_{س \to \pi} \frac{جاس}{س}$

**تدريب ٢** إختر الإجابة الصحيحة

① $\lim_{س \to ٠} \sqrt{٤ - س^{٢}} =$
[ −١ ، صفر ، ٢ ، ليس لها وجود ]

② $\lim_{س \to ٢} \frac{٥}{(س - ٢)^{٢}} =$
[ $-\frac{٥}{٢}$ ، صفر ، ٥ ، ليس لها وجود ]

③ $\lim_{س \to \frac{\pi}{٤}} \frac{طاس}{س} =$
[ صفر ، ١ ، $\frac{٤}{\pi}$ ، ليس لها وجود ]

**ملحوظة:** لإيجاد $\lim_{\text{س} \to \text{أ}} \frac{\text{د(س)}}{\text{ر(س)}}$ نوجد:-

$\lim_{\text{س} \to \text{أ}} \text{د(س)} = \text{ل}$ ، $\lim_{\text{س} \to \text{أ}} \text{ر(س)} = \text{م}$

وإذا كان: ل = صفر ، م = صفر أي $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ كمية غير معينة فإننا نقوم باختصار المقدار (س − أ) عن طريق: تحليل – الضرب × المرافق – القسمة المطولة

---

**تدريب ٣** أوجد النهايات التالية:-

(١) $\lim_{\text{س} \to 3} \frac{\text{س}^2 - 9}{\text{س} - 3}$

$= \lim_{\text{س} \to 3} \frac{(\text{س} - 3)(\text{س} + 3)}{(\text{س} - 3)}$

$= \lim_{\text{س} \to 3} (\text{س} + 3) = 3 + 3 = 6$

(٢) $\lim_{\text{س} \to 4} \frac{\text{س}^2 + \text{س} - 20}{\text{س}^2 - 5\text{س} + 4}$

$= \lim_{\text{س} \to 4} \frac{(\text{س} - 4)(\text{س} + 5)}{(\text{س} - 4)(\text{س} - 1)}$

$= \lim_{\text{س} \to 4} \frac{\text{س} + 5}{\text{س} - 1} = \frac{9}{3} = 3$

(٣) $\lim_{\text{س} \to 3} \frac{\text{س}^3 - 27}{\text{س} - 3}$

$= \lim_{\text{س} \to 3} \frac{(\text{س} - 3)(\text{س}^2 + 3\text{س} + 9)}{(\text{س} - 3)}$

$= \lim_{\text{س} \to 3} (\text{س}^2 + 3\text{س} + 9) = 27$

(٤) $\lim_{\text{س} \to 1} \frac{2\text{س}^2 + \text{س} - 3}{\text{س}^2 - 1}$

$= \lim_{\text{س} \to 1} \frac{(\text{س} - 1)(2\text{س} + 3)}{(\text{س} - 1)(\text{س} + 1)}$

$= \lim_{\text{س} \to 1} \frac{2\text{س} + 3}{\text{س} + 1} = \frac{5}{2}$

(٥) $\lim_{\text{س} \to 0} \frac{(\text{س} + 5)^2 - 25}{\text{س}}$

$= \lim_{\text{س} \to 0} \frac{\text{س}^2 + 10\text{س} + 25 - 25}{\text{س}}$

$= \lim_{\text{س} \to 0} \frac{\text{س}^2 + 10\text{س}}{\text{س}}$

$= \lim_{\text{س} \to 0} \frac{\text{س}(\text{س} + 10)}{\text{س}}$

$= \lim_{\text{س} \to 0} (\text{س} + 10) = 10$

**لاحظ:** جميع المسائل السابقة نوجد نهاية البسط ونهاية المقام والناتج = $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ كمية غير معينة لذلك استخدمنا التحليل للاختصار في الحل.

## تدريب ٤ — اختر الإجابة الصحيحة :-

(١) $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نها}} (٢س^٢ - أس - أ^٢) = ......$

(أ) صفر (ب) أ

(ج) $أ^٢ - ٢أ$ (د) $٤أ^٢$

(٢) $\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نها}} \frac{س^٢ - س - ٦}{س^٢ + س - ١٢} =$

(أ) $\frac{٥}{٧}$ (ب) $\frac{١}{٧}$

(ج) $-١$ (د) $-٥$

(٣) $\underset{س \leftarrow م}{\text{نها}} \frac{٢س^٢ - س - ٣}{٤س^٢ - ٩} = \frac{٥}{١٢}$ فإن: م =

(أ) $\frac{٣}{٢}$ (ب) $-\frac{٣}{٢}$

(ج) $-\frac{٢}{٣}$ (د) $\frac{٢}{٣}$

(٤) $\underset{س \leftarrow ٤}{\text{نها}} \frac{٣س^٢ - ٨س - ١٦}{س^٢ - ٤} =$

(أ) ٤ (ب) ٢

(ج) ليس لها وجود (د) ١

(٥) إذا كانت: $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نها}} \frac{د(س) - ٥}{س - ٢} = ١$ حيث د(س) كثيرة حدود

فإن: $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نها}} د(س) = ......$

(أ) صفر (ب) ٢

(ج) ٥ (د) $-٥$

## مسائل على الضرب في المرافق

(١) $\underset{س \leftarrow ٤}{\text{نها}} \frac{\sqrt{س-٣} - ١}{س - ٤}$

$= \underset{س \leftarrow ٤}{\text{نها}} \frac{\sqrt{س-٣} - ١}{س - ٤} \times \frac{\sqrt{س-٣} + ١}{\sqrt{س-٣} + ١}$

$= \underset{س \leftarrow ٤}{\text{نها}} \frac{(س - ٣ - ١)}{(س-٤)(\sqrt{س-٣} + ١)}$

$= \underset{س \leftarrow ٤}{\text{نها}} \frac{١}{\sqrt{س-٣} + ١} = \frac{١}{٢}$

(٢) $\underset{س \leftarrow ٥}{\text{نها}} \frac{\sqrt{س-١} - ٢}{س - ٥}$

$= \underset{س \leftarrow ٥}{\text{نها}} \frac{\sqrt{س-١} - ٢}{س - ٥} \times \frac{\sqrt{س-١} + ٢}{\sqrt{س-١} + ٢}$

$= \underset{س \leftarrow ٥}{\text{نها}} \frac{(س - ١ - ٤)}{(س-٥)(\sqrt{س-١} + ٢)}$

$= \underset{س \leftarrow ٥}{\text{نها}} \frac{١}{\sqrt{س-١} + ٢} = \frac{١}{٤}$

(٣) $\underset{س \leftarrow -١}{\text{نها}} \frac{س + ١}{\sqrt{س+٥} - ٢}$

$= \underset{س \leftarrow -٢}{\text{نها}} \frac{س + ١}{\sqrt{س+٥} - ٢} \times \frac{\sqrt{س+٥} + ٢}{\sqrt{س+٥} + ٢}$

$= \underset{س \leftarrow -٢}{\text{نها}} \frac{(س+١)(\sqrt{س+٥} + ٢)}{(س + ٥ - ٤)}$

$= \underset{س \leftarrow -٢}{\text{نها}} (\sqrt{س+٥} + ٢) = ٤$

④ $\lim\limits_{\text{س}\to 5} \dfrac{\text{س}^2 - 5\text{س}}{\sqrt{\text{س}+4} - 3}$

$= \lim\limits_{\text{س}\to 5} \dfrac{\text{س}^2 - 5\text{س}}{\sqrt{\text{س}+4} - 3} \times \dfrac{\sqrt{\text{س}+4} + 3}{\sqrt{\text{س}+4} + 3}$

$= \lim\limits_{\text{س}\to 5} \dfrac{\text{س}(\text{س}-5)(\sqrt{\text{س}+4}+3)}{(\text{س}+4-9)}$

$= \lim\limits_{\text{س}\to 5} \text{س}(\sqrt{\text{س}+4}+3) = 5 \times 6 = 30$

⑤ $\lim\limits_{\text{س}\to -1} \dfrac{\sqrt{2} - \sqrt{\text{س}-7}}{\text{س}-9} = \ldots\ldots$

(أ) $-\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ (ب) $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

(ج) $2\sqrt{2}$ (د) $-2\sqrt{2}$

⑥ $\lim\limits_{\text{س}\to 4} \dfrac{\sqrt{\text{س}} - 2}{5\text{س}^2 - 23\text{س} + 12} =$

(أ) $\dfrac{1}{92}$ (ب) $\dfrac{1}{68}$

(ج) $68$ (د) $92$

⑦ $\lim\limits_{\text{س}\to 4} \dfrac{\sqrt{2\text{س}+1} - 3}{\text{س}^2 - 16} =$

(أ) $\dfrac{1}{12}$ (ب) $\dfrac{1}{24}$

(ج) $\dfrac{1}{48}$ (د) $\dfrac{1}{36}$

⑧ $\lim\limits_{\text{س}\to -1} \dfrac{\sqrt{\text{س}^2+8} - 3}{\text{س}+1} =$

(أ) $-\dfrac{1}{3}$ (ب) $\dfrac{1}{3}$

(ج) $-3$ (د) $3$

## مسائل على القسمة المطولة

① $\lim\limits_{\text{س}\to 2} \dfrac{\text{س}^3 - \text{س}^2 - 5\text{س} + 6}{\text{س} - 2}$

(i) نرتب معاملات المقدار تنازلياً حسب قوى س

(ii) نأخذ معاملات المقدار الجبرى

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | −1 | −5 | 6 | 2 |
| | + | + | + | |
| | 2 | 2 | −6 | |
| 1 | 1 | −3 | 0 ← لازم | |

$= \lim\limits_{\text{س}\to 2} \dfrac{(\text{س}-2)(\text{س}^2+\text{س}-3)}{(\text{س}-2)}$

$= \lim\limits_{\text{س}\to 2} (\text{س}^2+\text{س}-3) = 4 + 2 - 3 = 3$

② $\lim\limits_{\text{س}\to 4} \dfrac{\text{س}^3 - 15\text{س} - 4}{\text{س} - 4}$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | −15 | −4 | 4 |
| | + | + | + | |
| | 4 | 16 | 4 | |
| 1 | 4 | 1 | 0 | |

$= \lim\limits_{\text{س}\to 4} \dfrac{(\text{س}-4)(\text{س}^2+4\text{س}+1)}{(\text{س}-4)}$

$= \lim\limits_{\text{س}\to 4} (\text{س}^2+4\text{س}+1) = 33$

## نظرية ٤ (القانون)

إذا كان $ن \in ح - \{٠\}$

① $\lim_{س \to أ} \frac{س^{ن} - أ^{ن}}{س - أ} = ن \times أ^{ن-١}$

② $\lim_{س \to أ} \frac{س^{ن} - أ^{ن}}{س^{م} - أ^{م}} = \frac{ن}{م} \times أ^{ن-م}$

③ $\lim_{س \to ١} \frac{س^{ن} - ١}{س^{م} - ١} = \frac{ن}{م}$

① $\lim_{س \to ٣} \frac{س^{٤} - ٨١}{س - ٣}$

$= \lim_{س \to ٣} \frac{س^{٤} - ٣^{٤}}{س - ٣} = ٤ \times ٣^{٤-١} = ١٠٨$

② $\lim_{س \to -٢} \frac{س^{٥} + ٣٢}{س + ٢}$

$= \lim_{س \to -٢} \frac{س^{٥} - (-٢)^{٥}}{س - (-٢)} = ٥(-٢)^{٤} = ٨٠$

③ $\lim_{س \to \sqrt{٥}} \frac{س^{٧} - ١٢٥\sqrt{٥}}{س - \sqrt{٥}}$

$= \lim_{س \to \sqrt{٥}} \frac{س^{٧} - (\sqrt{٥})^{٧}}{س - \sqrt{٥}}$

$= ٧ \times (\sqrt{٥})^{٦} = ٨٧٥$

④ $\lim_{س \to ٢} \frac{س^{٧} - ١٢٨}{س^{٣} - ٨}$

$= \lim_{س \to ٢} \frac{س^{٧} - ٢^{٧}}{س^{٣} - ٢^{٣}}$

$= \frac{٧}{٣} \times (٢)^{٤} = \frac{١١٢}{٣}$

⑤ $\lim_{س \to ٤} \frac{٢س^{٣} - ١٢٨}{س^{٢} - ١٦}$

$= \lim_{س \to ٤} \frac{٢(س^{٣} - ٦٤)}{س^{٢} - ١٦}$

$= ٢ \times \lim_{س \to ٤} \frac{س^{٣} - ٤^{٣}}{س^{٢} - ٤^{٢}}$

$= ٢ \times \frac{٣}{٢} \times ٤ = ١٢$

⑥ $\lim_{س \to \frac{١}{٢}} \frac{س^{٣} - \frac{١}{٨}}{س^{٢} - \frac{١}{٤}}$

$= \lim_{س \to \frac{١}{٢}} \frac{س^{٣} - (\frac{١}{٢})^{٣}}{س^{٢} - (\frac{١}{٢})^{٢}} = \frac{٣}{٢} \times (\frac{١}{٢}) = \frac{٣}{٤}$

⑦ $\lim_{س \to ٢} \frac{س^{٧} - ١٢٨}{س^{٢} - ٥س + ٦}$

$= \lim_{س \to ٢} \frac{س^{٧} - ٢^{٧}}{(س-٢)(س-٣)}$

$= \lim_{س \to ٢} \frac{س^{٧} - ٢^{٧}}{س - ٢} \times \lim_{س \to ٢} \frac{١}{س - ٣}$

$= ٧ \times ٢^{٦} \times \frac{١}{-١} = -٤٤٨$

(٨) $\lim\limits_{٢س \to ١} \frac{١٢٨س^{٧} - ١}{٣٢س^{٥} - ١}$

$= \lim\limits_{٢س \to ١} \frac{(٢س)^{٧} - ١}{(٢س)^{٥} - ١} = \frac{٧}{٥}$

(٩) $\lim\limits_{هـ \to ٠} \frac{(٣+هـ)^{٥} - ٢٤٣}{هـ}$

$\because$ هـ $\to$ ٠ $\therefore$ ٣ + هـ $\to$ ٣

$= \lim\limits_{٣+هـ \to ٣} \frac{(٣+هـ)^{٥} - ٣^{٥}}{(٣+هـ) - ٣} = ٥ \times ٣^{٤} = ٤٠٥$

(١٠) $\lim\limits_{هـ \to ٠} \frac{(٣+هـ)^{٤} - ٨١}{٦هـ}$

$= \frac{١}{٦} \lim\limits_{٣+هـ \to ٣} \frac{(٣+هـ)^{٤} - ٣^{٤}}{(٣+هـ) - ٣}$

$= \frac{١}{٦} \times ٤ \times ٣^{٣} = ١٨$

(١١) $\lim\limits_{س \to ٦} \frac{(س-٥)^{٧} - ١}{س - ٦}$

$= \lim\limits_{س-٥ \to ١} \frac{(س-٥)^{٧} - ١}{(س-٥) - ١} = ٧$

(١٢) $\lim\limits_{هـ \to ٠} \frac{(٣+٢هـ)^{٥} - ٢٤٣}{هـ}$

$= ٢ \times \lim\limits_{٢هـ \to ٠} \frac{(٣+٢هـ)^{٥} - ٣^{٥}}{(٣+٢هـ) - ٣}$

$= ٢ \times ٥ \times ٣^{٤} = ٨١٠$

(١٣) $\lim\limits_{س \to ٢٧} \frac{س^{\frac{٥}{٣}} - ٢٤٣}{س - ٢٧} = $

(أ) ١٥ (ب) $\frac{٥}{٣}$

(ج) ٩ (د) ٢٧

(١٤) إذا كانت د(س) = س^٥ ، ر(س) = س^٤ − ٤

فإن: $\lim\limits_{س \to ٢} \frac{د(س) - ٣٢}{ر(س)} = ......$

(أ) −٢٠ (ب) ٢٠

(ج) ٣٢ (د) ٣٠

(١٥) إذا كانت: $\lim\limits_{س \to أ} \frac{س^{ن} - أ^{ن}}{س^{م} - أ^{م}} = \frac{ن}{م}$ فإن أ =

(أ) $\frac{م}{ن}$ (ب) ن

(ج) م (د) ١

(١٦) $\lim\limits_{س \to ١٦} \frac{\sqrt[٤]{س^{٧}} - ١٢٨}{س - ١٦} = $

(أ) ١٤ (ب) −١٤

(ج) $\frac{١}{١٤}$ (د) $\frac{-١}{١٤}$

(١٧) إذا كانت: د(س) = $\frac{١}{س^{٤}}$ فإن

$\lim\limits_{س \to ٢} \frac{د(س) - د(٢)}{س - ٢} = $

(أ) −٨ (ب) ٨

(ج) $\frac{١}{٨}$ (د) $\frac{-١}{٨}$



# نهاية دالة عند اللانهاية

**نظرية:**

$\lim\limits_{س \to \infty} \frac{1}{س} = $ صفر

**نتيجة:**

① $\lim\limits_{س \to \infty} \frac{P}{س^ن} = $ صفر حيث $ن \in ح^+$

② $\lim\limits_{س \to \infty} ح = ح$ حيث ح ثابت

**ملاحظات:** عند إيجاد $\lim\limits_{س \to \infty} \frac{د(س)}{ر(س)}$ حيث د ، ر دوال كثيرة حدود ، ر(س) ≠ ٠ فإن:

(i) إذا كانت درجة البسط = درجة المقام ⟸ ناتج النهاية = عدد حقيقي ≠ ٠

(ii) إذا كانت درجة البسط < درجة المقام ⟸ ناتج النهاية = صفر

(iii) إذا كانت درجة البسط > درجة المقام ⟸ ناتج النهاية = $\pm \infty$

---

**تدريب ١** أكمل ما يأتي:

① $\lim\limits_{س \to \infty} (\frac{1}{س} + ٤) = $

② $\lim\limits_{س \to \infty} (٥ - \frac{1}{س^٢}) = $

③ $\lim\limits_{س \to \infty} \sqrt{\frac{1}{س}} = $

④ $\lim\limits_{س \to \infty} ٩ = $

⑤ $\lim\limits_{س \to \infty} (\sqrt{\frac{٤}{س} + 1}) = $

⑥ $\lim\limits_{س \to \infty} (س^٢ - ٣) = $

⑦ $\lim\limits_{س \to \infty} \frac{\frac{1}{٥}}{س} = $

**تدريب ٢** أوجد النهايات التالية:

① $\lim\limits_{س \to \infty} (س^٣ + ٥س^٢ + 1)$

$= \infty + \infty + 1 = \infty + 1 = \infty$

② $\lim\limits_{س \to \infty} (س^{-٢} + س^{-١} + ٤)$

$= \lim\limits_{س \to \infty} (\frac{1}{س^٢} + \frac{1}{س} + ٤)$

$= ٠ + ٠ + ٤ = ٤$

③ $\lim\limits_{س \to \infty} (س^٣ - ٥س + 1)$

$= \lim\limits_{س \to \infty} س^٣ (1 - \frac{٥}{س^٢} + \frac{1}{س^٣})$

$= \infty (1 - ٠ + ٠) = \infty$

## تدريب ٣ : أوجد ناتج النهايات التالية

(١) $\lim_{س \to \infty} \frac{٥ - ٦س - ٣س^٢}{٢س^٢ + س - ٤}$

بقسمة البسط والمقام على أعلى أس للمتغير س في المقام

$= \lim_{س \to \infty} \frac{\frac{٥}{س^٢} - \frac{٦س}{س^٢} - \frac{٣س^٢}{س^٢}}{\frac{٢س^٢}{س^٢} + \frac{س}{س^٢} - \frac{٤}{س^٢}}$

$= \lim_{س \to \infty} \frac{\frac{٥}{س^٢} - \frac{٦}{س} - ٣}{٢ + \frac{١}{س} - \frac{٤}{س^٢}}$

$= \frac{٠ - ٠ - ٣}{٢ + ٠ - ٠} = \frac{-٣}{٢}$

(٢) $\lim_{س \to \infty} \frac{٢س^٢ - ١}{٤س^٣ - ٥س - ١}$ بالقسمة على $س^٣$

$\lim_{س \to \infty} \frac{\frac{٢}{س} - \frac{١}{س^٣}}{٤ - \frac{٥}{س^٢} - \frac{١}{س^٣}} = \frac{صفر}{٤} = صفر$

(٣) $\lim_{س \to \infty} \frac{س^٣ - ٢}{٣س^٢ + ٤س + ١}$ ÷ $س^٢$

$= \lim_{س \to \infty} \frac{س - \frac{٢}{س^٢}}{٣ + \frac{٤}{س} + \frac{١}{س^٢}}$

$= \frac{\infty - ٠}{٣ + ٠ + ٠} = \frac{\infty}{٣} = \infty$

(٤) $\lim_{س \to \infty} \frac{(٣س + ٢)(٥س - ١)}{(٤س + ٣)(٢س - ٧)}$

لاحظ لو تم فك القواس هاتكون بكية س^٢

$= \lim_{س \to \infty} \frac{(\frac{٣س}{س} + \frac{٢}{س})(\frac{٥س}{س} - \frac{١}{س})}{(\frac{٤س}{س} + \frac{٣}{س})(\frac{٢س}{س} - \frac{٧}{س})}$

$= \lim_{س \to \infty} \frac{(٣ + \frac{٢}{س})(٥ - \frac{١}{س})}{(٤ + \frac{٣}{س})(٢ - \frac{٧}{س})} = \frac{١٥}{٨}$

(٥) $\lim_{س \to \infty} \frac{(٢س^٣ - ٥)(٧س^٢ + ١)}{س^٥ + ٤}$

بالقسمة على $س^٥ = \frac{س^٣}{س^٢}$

$= \lim_{س \to \infty} \frac{(٢ - \frac{٥}{س^٣})(٧ + \frac{١}{س^٢})}{١ + \frac{٤}{س^٥}}$

$= \frac{١٤}{١} = ١٤$

(٦) $\lim_{س \to \infty} \left(٧ + \frac{٢س^٢}{(س+٣)^٢}\right)$

$= \lim_{س \to \infty} ٧ + \lim_{س \to \infty} \frac{٢س^٢}{س^٢ + ٦س + ٩}$

$= ٧ + \lim_{س \to \infty} \frac{٢}{١ + \frac{٦}{س} + \frac{٩}{س^٢}}$

$= ٧ + ٢$

$= ٩$

**ملحوظة:** $\sqrt{س^2} = \sqrt[3]{س^3} = \sqrt[4]{س^4} = \dots = س$

(٧) $\lim_{س \to \infty} \dfrac{5س + 7}{\sqrt{4س^2 + 9}}$

$= \lim_{س \to \infty} \dfrac{5 + \frac{7}{س}}{\sqrt{4 + \frac{9}{س^2}}}$ ∵ $\sqrt{س^2} = س$

$= \dfrac{5 + 0}{\sqrt{4 + 0}} = \dfrac{5}{2}$

(٨) $\lim_{س \to \infty} \dfrac{\sqrt{س^2 + 5}}{\sqrt[3]{8س^3 + 4}}$

بالقسمة على $\sqrt{س^2} = \sqrt[3]{س^3} = س$

$= \lim_{س \to \infty} \dfrac{\sqrt{1 + \frac{5}{س^2}}}{\sqrt[3]{8 + \frac{4}{س^3}}} = \dfrac{1}{2}$

(٩) $\lim_{س \to \infty} \dfrac{2س^{-1} - 3س^{-2} + س^{-3}}{4س^{-3} + س^{-1}}$

بضرب البسط والمقام × $س^3$

$= \lim_{س \to \infty} \dfrac{2س^2 - 3س + 1}{4 + س^2}$ ÷ $س^2$

$= \lim_{س \to \infty} \dfrac{2 - \frac{3}{س} + \frac{1}{س^2}}{\frac{4}{س^2} + 1}$

$= \dfrac{2 - 0 + 0}{0 + 1}$

$= 2$

**تدريب ٤** إختر الاجابة الصحيحة :-

(١) $\lim_{س \to \infty} \dfrac{3س^2}{س(2س - 1)} =$

(أ) $\frac{3}{2}$ (ب) $\frac{2}{3}$ (جـ) صفر (د) ٣

(٢) إذا كانت $\lim_{س \to \infty} \dfrac{أس^2 - 5س}{2س + 3س^2} = 3$ فإن أ = .....

(أ) ٣ (ب) ٦ (جـ) ٩ (د) ١٢

(٣) $\lim_{س \to \infty} \dfrac{5 + س^{-2}}{1 + 3س^{-2}} =$

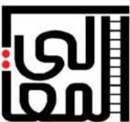
(أ) $\frac{1}{3}$ (ب) $\frac{5}{4}$ (جـ) $\frac{5}{3}$ (د) ٥

(٤) $\lim_{س \to \infty} \left(\dfrac{3س^2 + 2س + 1}{س^2 - 3س + 2}\right)^4 =$

(أ) ٣ (ب) ٩ (جـ) ٢٧ (د) ٨١

(٥) $\lim_{س \to \infty} \dfrac{س^{-5} + 2س^{-3} - س^{-2}}{(3س + 4)^{-2}} =$ .....

(أ) ٩ (ب) −٩ (جـ) $\frac{1}{3}$ (د) صفر



# نهاية الدوال المثلثية

**نظرية**

$\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نها}} \frac{\text{جا س}}{\text{س}} = ١$

$\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نها}} \frac{\text{ظا س}}{\text{س}} = ١$ حيث س بالتقدير الدائري

**نتائج**

(١) $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نها}} \frac{\text{جا أس}}{\text{س}} = \text{أ}$

(٢) $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نها}} \frac{\text{جا أس}}{\text{ب س}} = \frac{\text{أ}}{\text{ب}}$

(٣) $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نها}} \frac{\text{جا}^{٢} \text{أس}}{\text{س}^{٢}} = \text{أ}^{٢}$

(٤) $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نها}} \frac{١ - \text{جتا س}}{\text{س}} = \text{صفر}$

**تدريب ١**

أكمل ما يأتي :

(١) $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نها}} \text{جتا ٣س} =$

(٢) $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نها}} \text{ظا س} =$

(٣) $\underset{\text{س} \leftarrow \frac{\pi}{٢}}{\text{نها}} \text{جا ٢س} =$

(٤) $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نها}} \frac{\text{جا ٧س}}{\text{س}} =$

(٥) $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نها}} \frac{٣ + ٢\text{س}}{\text{جتا ٤س}} =$

(٦) $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نها}} \frac{١ - \text{جتا س}}{\text{٣س}} =$

(٧) $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نها}} \frac{\text{جا}^{٢} \text{س}}{\text{س}^{٢}} =$

(٨) $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نها}} \frac{\text{ظا}^{٢} \text{٣س}}{\text{٥س}^{٢}} =$

(٩) $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نها}} \frac{\text{ظا ٣س}}{\text{٤س}} =$

(١٠) $\underset{\text{س} \leftarrow ٥}{\text{نها}} \frac{\text{جا (س} - ٥)}{\text{٣س} - ١٥} =$

(١١) $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نها}} \frac{\text{جا } \pi \text{س}}{\text{٢س}} =$

(١٢) $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نها}} \frac{\text{٢س}}{\text{ظا ٣س}} =$

(١٣) $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نها}} \text{٣س قتا ٢س} =$

(١٤) $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نها}} \text{س ظتا س} =$

(١٥) $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نها}} \frac{\text{جا ٢س ظا ٣س}}{\text{٤س}^{٢}} =$

(١٦) $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نها}} \frac{\text{ظا } \frac{١}{٢}\text{س}}{\text{ظا ٣س}} =$

## تدريب ٢ : أوجد النهايات التالية:

**١)** $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \dfrac{\text{٢س} - \text{٣حاس}}{\text{٣س} + \text{ظاس}}$

بقسمة البسط والمقام على س

$= \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \dfrac{٢ - ٣ \times \frac{\text{حاس}}{\text{س}}}{٣ + \frac{\text{ظاس}}{\text{س}}}$

$= \dfrac{٢ - ٣}{٣ + ١} = \dfrac{-١}{٤}$

**٢)** $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \dfrac{\text{٤س}^{٢} + \text{ظا٣س}}{\text{٧س} - \text{ظا٤س}}$

بقسمة البسط والمقام على س

$= \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \dfrac{\text{٤س} + \frac{\text{ظا٣س}}{\text{س}}}{٧ - \frac{\text{ظا٤س}}{\text{س}}}$

$= \dfrac{٠ + ٣}{٧ - ٤} = ١$

**٣)** $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \dfrac{\text{٤س}^{٢} + \text{حا}^{٢}\text{٣س}}{\text{س}^{٢} + \text{ظا٥س}^{٢}}$

بقسمة البسط والمقام على $\text{س}^{٢}$

$= \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \dfrac{٤ + \frac{\text{حا}^{٢}\text{٣س}}{\text{س}^{٢}}}{١ + \frac{\text{ظا٥س}^{٢}}{\text{س}^{٢}}}$

$= \dfrac{٤ + ٩}{١ + ٥} = \dfrac{١٣}{٦}$

**٤)** $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \dfrac{١ - \text{جتاس}}{\text{ظاس}}$

بقسمة البسط والمقام على س

$= \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \dfrac{\frac{١ - \text{جتاس}}{\text{س}}}{\frac{\text{ظاس}}{\text{س}}} = \dfrac{\text{صفر}}{١} = \text{صفر}$

**٥)** $\underset{\text{س}\to ٣}{\text{نها}} \dfrac{\text{حا(س} - ٣)}{\text{٢س} - ٦}$

$= \underset{\text{س}\to ٣}{\text{نها}} \dfrac{\text{ظا(س} - ٣)}{\text{٢(س} - ٣)} = \dfrac{١}{٢}$

**٦)** $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}} \dfrac{\text{ظا(س} - ٢)}{\text{س}^{٢} - ٤}$

$= \underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}} \dfrac{\text{ظا(س} - ٢)}{\text{(س} - ٢)\text{(س} + ٢)}$

$= \underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}} \dfrac{\text{ظا(س} - ٢)}{\text{(س} - ٢)} \times \underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}} \dfrac{١}{\text{س} + ٢}$

$= ١ \times \dfrac{١}{٤} = \dfrac{١}{٤}$

### تذكر أن

١) $\text{حا}(\pi - \text{س}) = \text{حاس}$

٢) $\text{ظا}(\pi - \text{س}) = -\text{ظاس}$

٣) $\text{حا}(\frac{\pi}{٢} - \text{س}) = \text{جتاس}$

٤) $\text{ظا}(\frac{\pi}{٢} - \text{س}) = \text{ظتاس}$

٥) $١ - \text{جتا}^{٢}\text{س} = \text{حا}^{٢}\text{س}$

(٧) $\displaystyle \lim_{\text{س}\to\pi} \frac{\text{جا س}}{\text{س}-\pi}$

لاحظ أن: $\text{جا}(\pi-\text{س}) = \text{جا س}$

$\therefore \displaystyle \lim_{\text{س}\to\pi} \frac{\text{جا}(\pi-\text{س})}{-(\pi-\text{س})} = -1$

(٨) $\displaystyle \lim_{\text{س}\to\frac{\pi}{2}} \frac{\text{جتا س}}{2\text{س}-\pi}$

إفتكر مهايا: $\text{جا}(\frac{\pi}{2}-\text{س}) = \text{جتا س}$

$\therefore \displaystyle \lim_{\text{س}\to\frac{\pi}{2}} \frac{\text{جا}(\frac{\pi}{2}-\text{س})}{-2(\frac{\pi}{2}-\text{س})} = -\frac{1}{2}$

(٩) $\displaystyle \lim_{\text{س}\to\frac{\pi}{2}} \frac{\text{ظتا س}}{\text{س}-\frac{\pi}{2}}$

إفتكر وصايا: $\text{ظا}(\frac{\pi}{2}-\text{س}) = \text{ظتا س}$

$\therefore \displaystyle \lim_{\text{س}\to\frac{\pi}{2}} \frac{\text{ظا}(\frac{\pi}{2}-\text{س})}{-(\frac{\pi}{2}-\text{س})} = -1$

(١٠) $\displaystyle \lim_{\text{س}\to 0} \frac{1-\text{جتا}^2 3\text{س}}{\text{س}^2}$

إفتكر مهايا: $1-\text{جتا}^2\text{س} = \text{جا}^2\text{س}$

$\therefore \displaystyle \lim_{\text{س}\to 0} \frac{\text{جا}^2 3\text{س}}{\text{س}^2} = 9$

## تدريب ٣ إختر الإجابة الصحيحة

(١) $\displaystyle \lim_{\text{س}\to 0} \left[\frac{\text{جا}2\text{س}}{3\text{س}} + \frac{\text{س جا}^2\text{س}}{\text{جا}^3\text{س}}\right] =$

(أ) $\frac{5}{3}$ (ب) $\frac{2}{3}$ (ج) ١ (د) $\frac{4}{3}$

(٢) $\displaystyle \lim_{\text{س}\to 0} \frac{4-\text{جا}3\text{س}}{\text{ظا س}-2\text{جا س}} = \ldots$

(أ) ٢ (ب) −٢ (ج) ١ (د) −١

(٣) إذا كان $\displaystyle \lim_{\text{س}\to 0} \frac{\text{جا}(أ+3)\text{س}}{\text{جا أس}} = \frac{2}{5}$

فإن: أ = .....

(أ) −٥ (ب) −٣ (ج) −١ (د) ٣

(٤) $\displaystyle \lim_{\text{س}\to 0} \frac{\text{جا س}-\text{جا س جتا س}}{\text{س}^2} =$

(أ) صفر (ب) ١ (ج) ٢ (د) ٣

(٥) إذا كانت $\displaystyle \lim_{\text{س}\to 0} \frac{\text{جا}^2\text{أس}-\text{ظا أس}^2}{\text{س}^2} = -1$

فإن: أ = .....

(أ) −١ (ب) ٢ (ج) ١ (د) ٤

## بحث وجود نهاية للدالة عند نقطة

الدالة د(س) تؤول إلى النهاية ل عندما س ← أ إذا وفقط إذا كانت: نهايتها اليمنى واليسرى عند أ موجودتين وكل منهما تساوى ل أى أن:

(١) النهاية اليمنى موجودة $\quad$ د(أ⁺) = ل

(٢) النهاية اليسرى موجودة $\quad$ د(أ⁻) = ل

(٣) النهاية اليمنى = النهاية اليسرى $\quad$ د(أ⁺) = د(أ⁻) = ل

---

**تدريب ١: إبحث وجود نهاية لكل مما يأتى:**

(١) د(س) = { ٢س ، س > ٢ ؛ س² ، س < ٢ } عند س = ٢

س² | ٢س (عند ٢)

د(٢⁺) = نها (س ← ٢) ٢س = ٤

د(٢⁻) = نها (س ← ٢) س² = ٤

∴ د(٢⁺) = د(٢⁻) ∴ نها (س ← ٢) د(س) = ٤

(٢) د(س) = { س² + ١ : س < ٣ ؛ ٣س + ١ : س > ٣ } عند س = ٣

س² + ١ | ٣س + ١ (عند ٣)

د(٣⁺) = نها (س ← ٣) ٣س + ١ = ٩ + ١ = ١٠

د(٣⁻) = نها (س ← ٣) س² + ١ = ٩ + ١ = ١٠

∴ نها (س ← ٣) د(س) = ١٠

(٣) د(س) = { (٣س + طاس) / (٥س − طاس) : س > ٠ ؛ جتاس : س < ٠ } عند س = ٠

د(٠⁺) = نها (س ← ٠) (٣س + طاس) / (٥س − طاس) $\quad$ بقسمة ÷ س

= نها (س ← ٠) (٣ + طاس/س) / (٥ − طاس/س) = (٣ + ١) / (٥ − ١) = ١

د(٠⁻) = نها (س ← ٠) جتاس = جتا٠ = ١

∴ نها (س ← ٠) د(س) = ١

④ إذا كانت: د(س) = { أس − ٣ ، س ≥ −١ ؛ س² + أ ، س < −١ }

أوجد قيمة أ التى تجعل د(س) لها وجود

| س² + أ | أس − ٣ |
|---|---|

−١

∴ الدالة لها نهاية عند س = −١

∴ $د(-١)^+ = د(-١)^-$

∴ ١ + أ = −أ − ٣

∴ أ = −٢

---

⑤ إذا كانت د(س) = { س² + ٣م : س < ٢ ؛ ٥س + ل : س ≥ ٢ }

أوجد قيمة م ، ل التى تجعل: $نهـا_{س \to ٢}$ د(س) = ٧

| س² + ٣م | ٥س + ل |
|---|---|

٢

∴ $د(٢)^+ = ٧$

∴ ١٠ + ل = ٧

∴ ل = ٣

∴ $د(٢)^- = ٧$

∴ ٤ + ٣م = ٧

∴ م = ١

---

## تدريب ٢ إختر الإجابة الصحيحة:

① إذا كانت د(س) = { ٣س − ١ ، س ≠ ٢ ؛ ٦ ، س = ٢ }

فإن: $نهـا_{س \to ٢}$ د(س) = ........

(أ) −٥ (ب) ٥ (ج) ٦ (د) ليس لها وجود

② إذا كانت د(س) = { $\frac{ظتا س}{\pi - ٢س}$ : ٠ < س < $\frac{\pi}{٢}$ ؛ طا(π − س) : س > $\frac{\pi}{٢}$ }

فإن: $نهـا_{س \to \frac{\pi}{٢}}$ د(س) = ........

(أ) ٢ (ب) $\frac{\pi}{٢}$ (ج) π (د) غير موجودة

③ إذا كانت د(س) = { $\frac{جا ٢س}{س}$ ، س < ٠ ؛ أ جتا س ، س ≥ ٠ }

حيث $نهـا_{س \to ٠}$ د(س) = ٢ فإن أ = ........

(أ) ١ (ب) ٢ (ج) صفر (د) −٢



# الإتصال

تكون الدالة د(س) متصلة عند س = م إذا تحققت الشروط الآتية معاً :-

1) د(س) معرفة عند س = م ........ د(م) لها وجود

2) د(س) لها نهاية عند س = م ........ نهـا د(س) لها وجود ($س \to م$)

3) نهـا د(س) = د(م) ($س \to م$) ........ ناتج التعريف = ناتج النهاية

**تدريب 1** ابحث اتصال الدوال التالية عند النقطة المعرفة عندها الدالة.

1) $د(س) = \begin{cases} ٢س + ١ & : س \leq ١ \\ س^٢ + ٢ & : س > ١ \end{cases}$ عند س = 1

$$٢س + ١ \quad | \quad س^٢ + ٢$$
(نقطة التقسيم: 1)

(i) د(1) = 3

(ii) $د(١^+) = \lim_{س \to ١} (س^٢ + ٢) = ٣$

(iii) $د(١^-) = \lim_{س \to ١} (٢س + ١) = ٣$

∴ الدالة متصلة عند س = 1

2) $د(س) = \begin{cases} ٥ - ٢س & ، س < -١ \\ ٣س + ٧ & ، س \geq -١ \end{cases}$ عند س = −1

(i) د(−1) =

(ii) $د(-١^+) =$

(iii) $د(-١^-) =$

3) $د(س) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{س+١} - ٢}{س - ٣} & : س \neq ٣ \\ \dfrac{١}{٤} & : س = ٣ \end{cases}$

عند س = 3

$$\frac{\sqrt{س+١} - ٢}{س - ٣} \quad | \quad \frac{\sqrt{س+١} - ٢}{س - ٣}$$
(نقطة التقسيم: 3)

لاحظ: س ≠ 3 معناها القاعدة لليمين = القاعدة ليسرى

(i) $د(٣) = \frac{١}{٤}$

(ii) $د(٣^+) = د(٣^-) = \lim_{س \to ٣} \frac{\sqrt{س+١} - ٢}{س - ٣} \times \frac{\sqrt{س+١} + ٢}{\sqrt{س+١} + ٢}$

$= \lim_{س \to ٣} \frac{س + ١ - ٤}{(س - ٣)(\sqrt{س+١} + ٢)}$

$= \frac{١}{٤}$

∴ $د(٣) = \lim_{س \to ٣} د(س)$

∴ الدالة متصلة عند س = 3

٤) د(س) = { ١ + طاس : س < $\frac{\pi}{2}$ ، (س − $\frac{\pi}{2}$)² + ٢ : س ≥ $\frac{\pi}{2}$ } عند س = $\frac{\pi}{2}$

(i) د($\frac{\pi}{2}$) =

∴

(ii) د($\frac{\pi}{2}$)⁺ =

(iii) د($\frac{\pi}{2}$)⁻ =

∴

تدريب ٣: إذا كانت د(س) = { $\frac{\text{حا}(س-٣)}{٢س-٦}$ : س ≠ ٣ ، ل : س = ٣ } متصلة عند س = ٣ أوجد قيمة ل

∵ الدالة متصلة عند س = ٣

∴ د(٣) = نها د(س) (س ← ٣)

∴ ل = نها $\frac{\text{حا}(س-٣)}{٢(س-٣)}$ (س ← ٣)

∴ ل = $\frac{١}{٢}$

---

تدريب ٢: إذا كانت د(س) = { أس² + ١ : س ≥ ٢ ، ٢س + ١ : س < ٢ } متصلة عند س = ٢ أوجد قيمة أ

أس² + ١ | ٢س + ١ (عند ٢)

∵ الدالة متصلة عند س = ٢

∴ د(٢)⁺ = د(٢)⁻

∴ ٤أ + ١ = ٤ + ١

∴ أ = ١

تدريب ٤: إذا كانت د(س) = { $\frac{٥س + \text{طا}س}{\text{حا}س}$ : س > ٠ ، ٦حتاس : س < ٠ } أعد تعريف الدالة بحيث تكون متصلة عند س = ٠

∵ د(٠)⁺ = نها $\frac{٥س + \text{طا}س}{\text{حا}س}$ (س ← ٠⁺)

= نها $\frac{٥ + \frac{\text{طا}س}{س}}{\frac{\text{حا}س}{س}}$ = ٦

د(٠)⁻ = نها ٦حتاس = ٦حتا٠ = ٦ (س ← ٠⁻)

∴ د(س) = { $\frac{٥س + \text{طا}س}{\text{حا}س}$ : س > ٠ ، ٦ : س = ٠ ، ٦حتاس : س < ٠ }

## إتصال دالة على فترة

إذا كانت الدالة د معرفة على الفترة المفتوحة ف = ]أ، ب[ فإن د تكون متصلة على ف إذا كانت متصلة عند كل نقطة تنتمي للفترة

**ملاحظات**

١) جميع الدوال كثيرة الحدود متصلة على ح أو فترة جزئية من ح

٢) الدوال الكسرية متصلة على ح - {أصفار المقام} أو فترة جزئية منها

٣) دالة الجيب د(س) = جاس ودالة جيب التمام د(س) = جتاس متصلة على ح أو فترة جزئية منها

**تدريب ٥** إختر الإجابة الصحيحة:

١) إذا كانت د دالة حيث:

$$د(س) = \begin{cases} ٢س & حيث س \leq ١ \\ ٣س - أ & س > ١ \end{cases}$$

متصلة عند س = ١ فإن: أ =

(أ) ١ (ب) ٢ (ج) ٢ (د) ١

٢) إذا كانت $د(س) = \begin{cases} ك س & عند س \leq ٢ \\ ٣س + ك & عند س > ٢ \end{cases}$

متصلة عند س = ٢ فإن: ك =

(أ) ٦ (ب) ٤ (ج) ٥ (د) ٣

٣) إذا كانت $د(س) = \begin{cases} \frac{\sqrt{س+٣} - ٢}{س - ١} & : س \neq ١ \\ أ & : س = ١ \end{cases}$

متصلة عند س = ١ فإن أ =

(أ) ٢ (ب) ٣ (ج) $\frac{١}{٤}$ (د) ٤

٤) الدالة د: $د(س) = \frac{-س}{س^٢ + ١}$ متصلة على .....

(أ) ح - {٠} (ب) ح - {-١، ١} (ج) ح (د) ح - {١}

اللهم إن كان من توفيق فمن الله وإن كان من خطأ أو نسيان فمني والشيطان

